קוסמולוגיה ויצירת גלקסיות - תרגול 1

מטריקות

הגדרת המטריקה

• המטריקה של מרחב מסו"מ (עקום או שטוח) היא טנזור שמוגדר ע"י הקשר

$$\boxed{ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu}$$

• זהו בעצם נוסחאות המרחק (האינפיניטסימלי) בין 2 נקודות במרחב $x^\mu ,\ x^\mu + dx^\mu$

• ביחסות כללית בקרב מחליפים $ds^2 \longrightarrow c^2 d\tau^2$

• ביחסות כללית מתעניינים רק במרחבים שניתן להעתיק אותה מקומית למטריקת מינקובסקי, כלומר למרחב שטוח (קירוב מישור משיק). לשם כך $g_{\alpha\beta}$ צריכה להיות דיפרנציאבילית, כלומר בעלת מרחב משיק בכל נקודה.

• המטריקה מכילה את כל המידע אודות מרחב מסו"מ, אך צורתה הספציפית תלויה בבחירת הקורדינטות בעזרתן אנו מתארים את המרחב.

עבור מטריקה נתונה, אלמנט נפח נתון ע"י

$$dV = \sqrt{|\det(g)|}\ \underline{dx^0 dx^1 dx^2 dx^3}$$

(זה היעקוביאן $\sqrt{|\det(g)|}$)

עבור מרחב 4 מימדי!

$\left(\prod_{\mu=1}^{N} dx^\mu\right)$ עבור כללי יש כאן

קואורדינטות קרטזיות

קורדינטות קרטזיות במרחב אוקלידי תלת-מימדי.

אלמנט אורך: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ (קורד' קרטזיות)

במקרה הזה המטריקה היא מטריקת היחידה: $g_{ij} = \delta_{ij}$

בכתיב מטריציוני:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

נעבור לקור' כדוריות:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad dx = dr\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi$$

$$dy = dr\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta\sin\varphi\, d\theta + r\sin\theta\cos\varphi\, d\varphi$$

$$dz = dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta$$

אחרי הרבה אלגברה מקבלים את התוצאה הידועה

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2}$$

המטריקה בצורה מטריצונית:

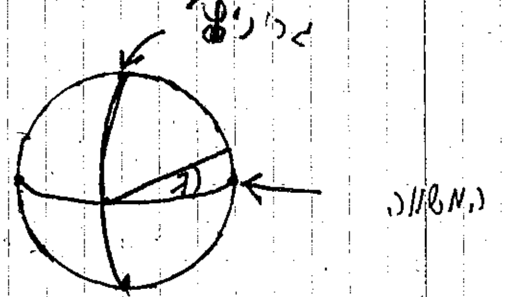
$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

מטריקה זו מתארת את אותו מרחב שטוח כמו מטריקת היחידה, רק עבור בחירת קורדינטות שונה, שמתאימה לצרכים שלנו.

תרגיל:

המטריקה עבור פני הגלובוס של כדור הארץ (קליפה כדורית דו-מימדית המוכלת במרחב תלת-מימדי) היא:

$$ds_S^2 = a^2(d\lambda^2 + \cos^2\lambda\, d\phi^2)$$

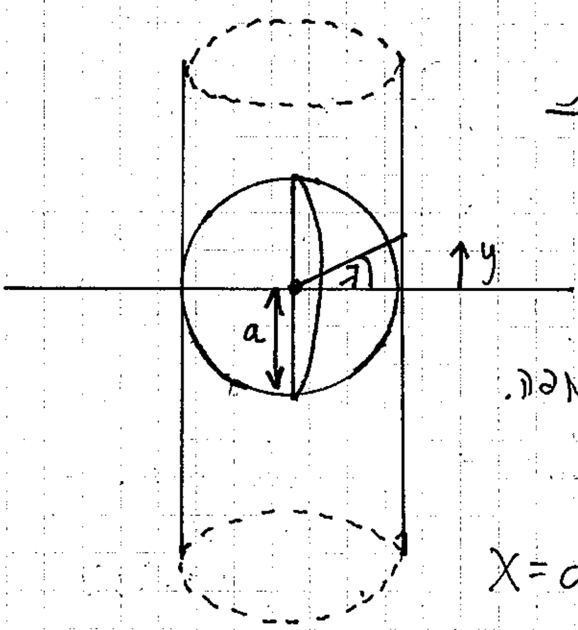


כאשר λ נותן את קווי הרוחב ו-ϕ את קווי האורך.

המטריקה של מפה שטוחה של העולם עם קור' קרטזיות x ו-y היא כידוע $ds_E^2 = dx^2 + dy^2$, אבל אנחנו לא מתעניינים בגיאומטריה של המפה, אלא בזו של הגלובוס שהיא מייצגת.

כידוע, אין מיפוי מלא אפשרי מן הספירה S^2 למישור R^2.

אולם אנו רוצים שהמיפוי בכל זאת ישמור על כמה שיותר תכונות חשובות של המטריקה, למשל שטחים או זוויות.
נבדוק מהי המטריקה של הגלובוס כאשר היא מבוטאת בקו' x,y (של המפה) עבור דוגמא אחת חשובה:



מפת העולם בהטלה גלילית

נעטוף את הכדור בגליל ונבצע את ההטלה הגלילית. ההטלה היא על מעטפת הגליל, ואז נפתח את המעטפת ונקבל את המפה.

נבחר את הקורדינטות על הגליל (המעטפת) ע"י

$$x = a\phi$$
$$y = a \,tg\, \theta$$

$$dy = a\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \Rightarrow d\theta^2 = dy^2\frac{\cos^4\theta}{a^2}$$

נשתמש בכך ש: $\cos^2\theta = \frac{1}{1+tg^2\theta}$ כדי לקבל

$$\boxed{ds_s^2 =} \cancel{a^2}\frac{dy^2\cos^4\theta}{\cancel{a^2}} + \frac{\cancel{a^2}}{1+\left(\frac{y}{a}\right)^2}\frac{dx^2}{\cancel{a^2}} = \boxed{\frac{a^4}{(a^2+y^2)^2}dy^2 + \frac{a^2}{a^2+y^2}dx^2}$$

בהשוואה עם $ds_E^2 = dx^2+dy^2$, אנו רואים כי העיוות הקטן ביותר במפה הוא ב- $y=0$ כלומר בסביבת המשווה. בעצם, ההעתקה לא מוגדרת על הקטבים, ולעומת זאת היא לוקחת קירוב מישור משיק למשווה.
בהעתקה הגלילית, קווי האורך ממופים לקווים אנכיים במרווחים שווים, וקווי הרוחב לקווים אופקיים ש<u>אינם</u> במרווחים שווים. המרווח הולך ומתבדר מן המשווה לכיוון הקטבים.

ניתן למצוא תמונות שממחישות את ההטלה באינטרנט.
כמו כן, ניתן לראות שההטלה הגלילית משמרת שטחים יחסית לכדור, אבל מעוותת זוויות (כפי שניתן היה לנחש).
רוב המפות בבית הן הטלה גלילית.
ישנה הטלה שימושית נוספת שקוראים לה <u>הטלה סטריאוגרפית</u> שהיא קונפ משמרת זוויות, אבל לא שטחים.

נבדוק שה"נפח" (השטח) הכולל במטריקה החדשה שלנו זהה ל"נפח" המקורי של הקליפה הכדורית. הרי המרחב הוא אותו מרחב:

<u>בכדור:</u>

$$g=\begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\boxed{V=}\iint\sqrt{\det(g)}\,d\theta\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos(\theta)\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=2\pi a^2\sin(\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{4\pi a^2}$$

<u>בהטלה גלילית:</u>

$$g=\begin{bmatrix} \frac{a^2}{a^2+y^2} & 0 \\ 0 & \frac{a^4}{(a^2+y^2)^2} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{V=}\iint\sqrt{\det(g)}\,dx\,dy=a^3\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi a}\frac{dx\,dy}{(a^2+y^2)^{3/2}}=$$

$$=2\pi a^4\cdot\frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{(1+u^2)^{3/2}}=4\pi a^2\int_0^{\infty}\frac{du}{(1+u^2)^{3/2}}=$$

$$\boxed{=4\pi a^2}$$

<u>כנדרש</u>

<u>מרחב 4 מימדי</u>

עד כאן קיבלנו על מרחב 2D עקום שמוכל במרחב 3D
כעת נדון במרחב 3D עקום שמוכל במרחב אוקלידי 4D.

<u>מרחב אוקלידי 4D:</u> $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2+dw^2$

<u>תת-מרחב ("מישורי") ה-3D:</u>

$$\boxed{ds^2=a^2\left[d\chi^2+\sin^2\chi\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2\right)\right]}$$

"רדיוס"

$0\leq\varphi\leq2\pi$

$0\leq\chi,\theta\leq\pi$

כלומר בצורה מטריציונית

$$g=\begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2\sin^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & a^2\sin^2\chi\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

(מאוד פשוט להבין איך להכליל את זה ל"ספירה" n מימדית שמוכלת במרחב אוקלידי $(n+1)$ מימדי)

"רדיוס" הספירה הוא

$$a^2=x^2+y^2+z^2+w^2$$

<u>הטרנס' לקורדינטות:</u>

$$x=a\sin\chi\sin\theta\cos\varphi$$
$$y=a\sin\chi\sin\theta\sin\varphi$$
$$z=a\sin\chi\cos\theta$$
$$w=a\cos\chi$$

בשיעורי בית, תחשבו את הנפח והשטח של מרחב זה בכמה מקרים.

<u>הערה:</u>

עד כאן, דנו רק בעקמומיות חיובית. מרחב עם עקמומיות שלילית ניתן לתיאור דומה ע"י השינוי

$$\sin\chi\longmapsto\sinh\chi$$
$$\cos\chi\longmapsto\cosh\chi$$

אבל, מתברר שלא ניתן להכיל מרחב שכזה בתוך מרחב אוקלידי 4 מימדי. כדי להכיל מרחב זה, נצטרך להשתמש במרחב <u>מינקובסקי!</u>

$$ds^2=-dw^2+dx^2+dy^2+dz^2$$
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} w&=a\cosh\chi \\ z&=a\sinh\chi\cos\theta \\ x&=a\sinh\chi\sin\theta\cos\varphi \\ y&=a\sinh\chi\sin\theta\sin\varphi \end{aligned}}$$

ואז ה"מישור" ה-3D שלנו מקיים

$$w^2-(x^2+y^2+z^2)=a^2$$

$$\boxed{ds^2=a^2\left[d\chi^2+\sinh^2\chi\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right]}$$

אלמנט אורך

המטריקה של יקום הומוגני ואיזוטרופי

האיזוטרופיות של היקום אומרת לנו שהאלמנט האורך ה- co-moving בקורדינטות ספיריות חייבת להיות הצורה הכללית

$$d\tilde{s}^2 = du^2 + \sigma^2(u)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

כאשר $\sigma(u)$ היא פונקציה של u בלבד (ולא של הכיוון)

כאשר $u = r/a(t)$ זה הקורדינטה הרדיאלית ה- co-moving.

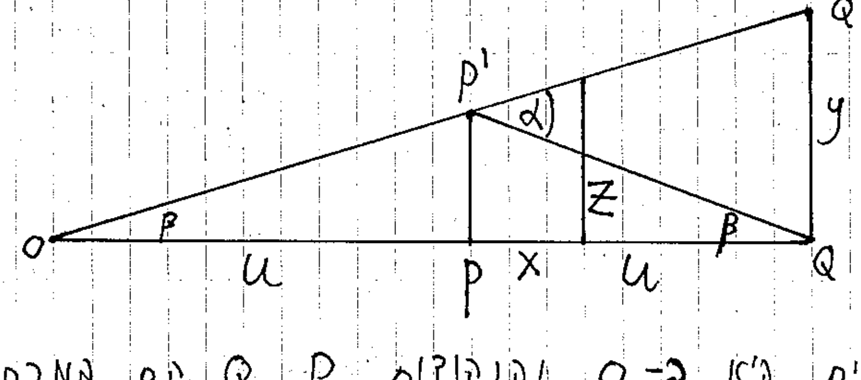
אנחנו רוצים להבין אילו צורות פונקציונליות אפשריות ל-$\sigma(u)$ בגלל ההומוגניות.

(זהו בעצם החלק המרחבי של המטריקה. למטריקה המלאה יש גם חלק זמני: $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\, d\tilde{s}^2$)

במרחב שטוח (מרחבית) אנחנו יודעים שמתקיים $\sigma(u) = u$ (מרחב אוקלידי). הנחת היסוד של יחסות כללית אומרת שכל מרחב הוא שטוח מקומית ולכן חייב להתקיים עבור $u \to 0$ ש: $\sigma(u) \sim u$.

ל-u כללי, נתבונן במישור המשוואה $\theta = \frac{\pi}{2}$ (כלומר $d\theta = 0$)

נתבונן בציור הבא במישור $u-\varphi$:



ראשית הצירים היא ב- O, והנקודות P, Q הם במרחקים רדיאלים u, $2u$ בהתאמה.

ניקח זוויות α, β שתהיינה קטנות.

העובדה שבמרחקים קטנים והמרחב שטוח מקומית אומר שמתקיים:

$$d\tilde{s}^2 = \sigma(u)^2\, d\varphi^2 \Longrightarrow \boxed{y=\sigma(2u)\cdot\beta}$$

כמו כן, ההומוגניות אומרת שניתן להעביר את קרנית M-O ל-P
וכך לקבל: $\boxed{y=\sigma(u)\cdot\alpha}$

ניקח אלמנט קטן x כמו בציור. בצורה הזו, בדומה למה שעשינו עבור y, ניתן לבטא את Z בשתי צורות:

$$Z=\sigma(u+x)\,\beta = \sigma(x)\cdot\alpha + \sigma(u-x)\,\beta \;\Big/\cdot\frac{\sigma(u)}{\beta}$$

$$\boxed{\sigma(u+x)\,\sigma(u)} = \sigma(x)\,\sigma(u)\,\frac{\alpha}{\beta} + \sigma(u-x)\,\sigma(u) = \boxed{\sigma(x)\,\sigma(2u)+\sigma(u-x)\,\sigma(u)}$$

נגזור את המשוואה הנ"ל לפי x ונקבל:

$$\sigma'(u+x)\,\sigma(u) = \sigma'(x)\,\sigma(2u) - \sigma'(u-x)\,\sigma(u)$$

נציב כעת $x=0$, ונזכור שעבור $u\to 0$ מתקיים $\sigma(u)=u$

$$\Downarrow$$

$$\sigma'(u)=1 \Longrightarrow \boxed{\sigma'(0)=1}$$

$$\Longrightarrow \sigma'(u)\,\sigma(u) = \sigma(2u) - \sigma'(u)\,\sigma(u)$$

$$\Downarrow$$

בתוספת התנאי $\sigma(u)\xrightarrow[u\to 0]{} u$

$$\boxed{2\sigma'(u)\,\sigma(u)=\sigma(2u)}$$

משוואה דיפרנציאלית ל-$\sigma(u)$

מתברר שלמשוואה הזו יש 3 פתרונות, שמסומנים ע"י $k=0,\pm1$:

$$\boxed{\sigma(u)=S_k(u)\equiv\begin{cases}\sin(u) & k=1\\ u & k=0\\ \sinh(u) & k=-1\end{cases}}$$

קל לוודא ששלוש הפונקציות הנ"ל מקיימות את המשוואה, וגם את "תנאי השפה" $\sigma(u)\xrightarrow[u\to 0]{} u$.

כך מקבלים את אלמנט האורך, בזמן נתון, בקורדינטות פיזיקליות (לא co-moving): $dl^2 = a^2(t)\left[du^2 + S_k^2(u)\,d\gamma^2\right]$

$$\left(d\gamma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

איך ניתן לפתור את המד"ר?

נציב פיתוח של $S(u)$ לטור חזקות: $S(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$

התנאי $S(u) \xrightarrow[u\to 0]{} u$ מקיים $\boxed{\begin{matrix} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{matrix}}$

$$S(2u) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n u^n$$

$$S'(u) = \frac{1}{u}\sum_{n=0}^{\infty} n a_n u^n$$

$$\Rightarrow 2\cdot\frac{1}{u}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n a_n u^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n u^n$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{gathered} \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} a_n u^{n+1} \\ b_n = \sum_{k=0}^{n} k\, a_k a_{n-k} \end{gathered}}$$

כעת משווים איבר-איבר בחזקות של u. למשל:

$\underline{u^0}$: $b_0 = 0 \Rightarrow 0\cdot a_0\cdot a_0 = 0$ (טריוויאלי)

$\underline{u^1}$: $b_1 = 2^{0-1} a_0 = 0 \Rightarrow 1\cdot a_1\cdot a_0 = 0$ ✓ (כי $a_0=0$)

$\underline{u^2}$: $b_2 = 1\cdot a_1\cdot a_1 + 2\cdot a_2\cdot a_0 = a_1^2 = 2^{1-1}\cdot a_1 = a_1 \Rightarrow \boxed{a_1^2 = a_1}$

ואכן $\boxed{a_1 = 1}$ מקיים זאת (למרות שמבחינים בסוף ערך של פתרונות או $a_1 = -1$).

$\underline{u^3}$: $\boxed{2a_2} = b_3 = 1\cdot a_1 a_2 + 2a_2\cdot a_1 + 3\cancel{a_3 a_0} = \boxed{3a_2}$

$$\Rightarrow \boxed{a_2 = 0}$$

$\underline{u^4:}$ $4a_3 = b_4 = 1\cdot a_1 \cdot a_3 + 2\cancel{a_2}a_2 + 3a_3 a_1 + 4\cancel{a_4}a_0$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{4a_3 = 4a_3} \Longrightarrow \boxed{a_3 \text{ פרמטר חופשי}}$$

ניתן להמשיך כך ולקבל שכל האיברים $a_{2n}=0$
ואילו כל האיברים האי-זוגיים a_{2n+1} תלויים ב- a_3.
הבחירה $a_3=0$ נותנת את הפתרון $G(u)=u$
הבחירה $a_3=\frac{1}{6}$ נותנת את טור החזקות של $\sinh(u)$
״ $a_3=-\frac{1}{6}$ ״ ״ ״ ״ ״ ״ $\sin(u)$
בחירה של a_3 חיובי או שלילי אחר, ניתנת לנרמול מחדש
ע״י שינוי היחידות של u כך שנוכל תמיד לחזור לטורי חזקות
של $\sin$ או $\sinh$