תרגול 5

23 באפריל 2013

מפאת עודף הסכומים והסימונים החלטנו לכתוב את התרגול הנוכחי במחשב. יובהר שאין בדבר בכדי הבטחה לעתיד :)

נושאי התרגול

1. הפוטנציאל מלולאת מטען. (Jackson 3.3)
2. פונקציות הכדור (spherical harmonics) ומשפט החיבור (Addition Theorem). (Jackson 3.6).

1 פוטנציאל מלולאת מטען

בכתה ראיתם את הפיתוח של המרחק ההפכי בין שתי נקודות בקורדינטות כדוריות:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\gamma) \tag{1}$$

כאשר

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi') \tag{2}$$

הוא ההפרש הזויתי בין הנקודות, ו $r_<$ ($r_>$) הוא הקטן (הגדול) מבין הזוג $|\mathbf{r}|,|\mathbf{r}'|$. נזכיר לכם שתוצאה זו התקבלה באופן הבא: תחילה, סובבנו את הצירים כך ש $\mathbf{r}'$ ישב על ציר z. לאחר מכן פיתחנו את $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ תוך הנחת סימטריה אזימוטלית

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\sum[A_lr^l+B_lR^{-(l+1)}]P_l(\cos\gamma) \tag{3}$$

בשלב זה הנחנו את $\mathbf{r}$ על ציר z גם כן וכך העלמנו את החלק הזויתי ומצאנו את הפיתוח:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rightarrow\frac{1}{|r-r'|}=\frac{1}{r_>}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l \tag{4}$$

המעבר מ (4) ל (1) התקבל מיידית מכך ש (3) הוא פיתוח **יחיד**, ולכן מספיק שמצאנו את A_l (B_l) כדי לתת את התוצאה הסופית. נשתמש בשיטה זו כדי לפתור את השאלה הבאה:

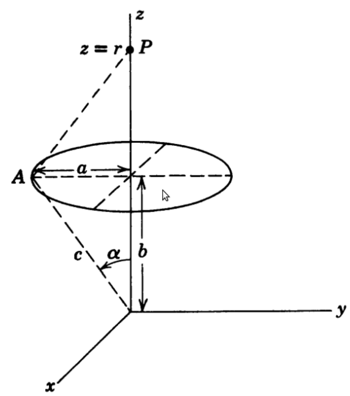


Figure 3.4 Ring of charge of radius a and total charge q located on the z axis with center at $z = b$.

איור 1: שאלה 1. לקוח מ Jackson.

שאלה: מצאו את הפוטנציאל שנובע מלולאת מטען ברדיוס a ומטען כולל q.

פתרון: נניח כי אנו מחפשים את התוצאה בנקודה P על ציר z. א זי, ברור כי התוצאה היא פשוט סכום על כל המטענים בלולאה והם כולם במרחק שווה מ P:

$$\Phi(z=r) = \frac{q}{\left(r^2 + c^2 - 2rc\cos\alpha\right)^{1/2}}$$

הביטוי הנ"ל הוא כמובן פשוט מרחק הפכי כמו (1) ולכן:

$$\Phi(z=r) = q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\alpha)$$

כאשר $r_{<(>)} = \min(\max)\{r,c\}$. ממשפט היחידות נובע כי הפתרון לכל נקודה הוא

$$\phi(r,\theta,\phi) = q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\alpha)P_l(\cos\theta)$$

2 פונקציות הכדור (spherical harmonics) ומשפט החיבור (Addition Theorem)

בכתה ראינו כי משוואת לפלס בקו' כדוריות כאשר מניחים הפרדת משתנים, $\Phi(r,\theta,\phi) = \frac{U(r)}{r}P(\theta)Q(\phi)$, מתפרקת לשלשה:

$$Q''(\phi) - m^2 Q = 0$$

$$
\begin{aligned}
U''(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} &= 0 \\
\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)\frac{dP}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P &= 0
\end{aligned}
$$

כאשר m מספר שלם ו $x = \cos\theta$. עבור סימטריה אזימוטלית ניתן להתעלם מ $Q(\phi)$ ולדרוש $m = 0$, ואז $P = P_l(x)$ הם פולינומי לז'נדר. עבור $-l \le m \le l$ פתרונות המשוואה $P = P^l_m(x)$ נקראים פוליומי לז'נדר המוכללים, והם מתקבלים באמצעות:

$$P^m_l(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$$

נהוג לקבץ את כל התלות הזויתית לתוך פונקציות הכדור Y_{lm}: משפחה אורתונורמלית שלמה הפורסת את המרחב של כדור היחידה:

$$Y_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P^m_l(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{5}$$

לפיכך, את הפוטנציאל הסקלרי המקיים את משוואת לפלס, ניתן לתאר כך:

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{U_l(r)}{r}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}Y_{lm}(\theta,\phi)$$

כל פונקציה $g(\theta,\phi)$ ניתנת לפיתוח ב Y_{lm}:

$$g(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}Y_{lm}(\theta,\phi)$$

כאשר $A_{lm} = \oint d\Omega Y^*_{lm}(\theta,\phi)g(\theta,\phi)$. למרות המבנה המורכב שלהם, פונקציות Y_{lm} הן פשוטות להבנה מבחינה אינטואיטיבית. אלו פשוט פונקציות מקבילות לסינוסים וקוסינוסים, אלא שהן חיות על הכדור במקום במרחב של הישר הממשי. דבר דומה לזה ראינו בקורס בגלים לגבי פונקציות בסל $J_l(\rho)$. באתר מופיעים קישורים לעזרים המסייעים "לראות" את מבנה הפונקציות.

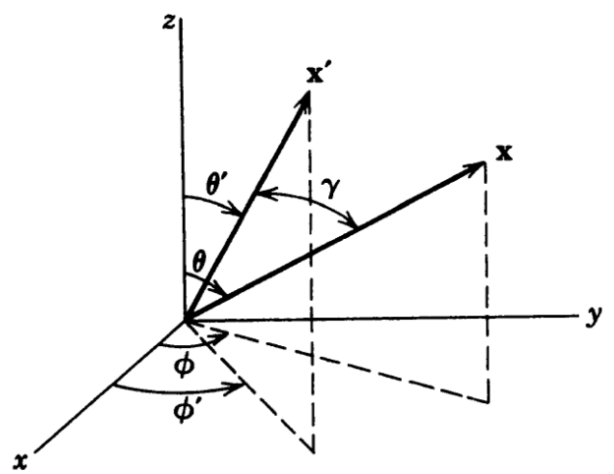
בדומה לסינוסים וקוסינוסים, גם ל Y_{lm} ישנן מספר תכונות המזכירות את הזהויות הטריגונומטריות. אחת החשובות בהם היא משפט החיבור. זוהי בעצם הכללה של הזהות הטריוויאלית

$$\cos(\theta-\theta') = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' \tag{6}$$

או (2) כפי שהיא מופיעה במערכת כדורית, כאשר θ,ϕ וכן θ',ϕ' מתארות שני מיקומים על מעגל היחידה. המשפט הוא:

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y^*_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{7}$$

להוכחת המשפט, נשים לב כי אם נתייחס לפונקציה $P_l(\cos\gamma)$ כפונקציה של θ,ϕ, אזי ברור שניתן לרשום אותה כסכום על פונקציות Y_{lm}:



איור 2: משפט החיבור. לקוח מ Jackson.

$$P_l\left[\cos\gamma(\theta,\phi)\right] = \sum_m A_m Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{8}$$

כאשר המקדמים תלויים במערכת השניה:

$$A_m = A_m(\theta',\phi') = \oint d\Omega\, Y^*_{lm}(\theta,\phi) P_l\left[\cos\gamma(\theta,\phi)\right] \tag{9}$$

המפתיע הוא, שכפי שנראה מקדמים אלו הם בעצמם Y_{lm}. נשים לב, כי הביטוי ב (9) הוא בדיוק אחד המקדמים של Y^*_{lm} בפיתוח לפי γ. במילים אחרות, נניח כי רצינו לבטא את המערכת כך:

$$Y^*_{lm}(\theta,\phi) = \sum_{m'=-l}^{l} B_{m'} Y_{lm'}(\gamma,\beta)$$

כאן בחרנו את γ להיות הקואורדינטה הפולרית. אזי, היות ו $Y_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l$ נקבל כי

$$B_0 = \oint d\Omega\, Y^*_{lm}(\theta,\phi) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\gamma) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} A_m$$

עתה, קל להיווכח כי לכל $m \neq 0$ מתקיים $Y_{lm}(\theta=0,\phi)=0$, היות ואחרת היתה לנו בעיה עם היחידות של הפונקציה בקוטב הצפוני. אולם,

$$Y^*_{lm}(\theta',\phi') \quad = \quad \left\{ \sum_{m'=-l}^{l} B_{m'} Y_{lm'}(\gamma,\beta) \right\}_{\gamma=0}$$

$$\begin{aligned}
&= B_0 Y_{l0}(0,\beta) \\
&= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} A_m(\theta',\phi') \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos 0) \\
&= A_m(\theta',\phi') \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)
\end{aligned}$$

ומכאן כי $A_m = \frac{4\pi}{2l+1} Y^*_{lm}(\theta',\phi')$. הצבה של תוצאה זו ב (8) מובילה מיד לתוצאה הרצויה (7). תוצאה מיידית וחשובה ממשפט זה הוא הפיתוח הבא:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\gamma) \\
&= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(\frac{1}{2l+1}\right) \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y^*_{lm}(\theta',\phi') Y_{lm}(\theta,\phi)
\end{aligned}$$