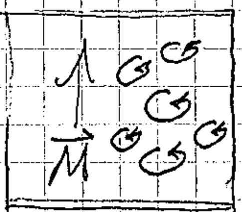
מגנטיזציה בחומר

נניח חומר שבו יש מומנטים מגנטיים אשר אינם מסודרים באופן סטטיסטי

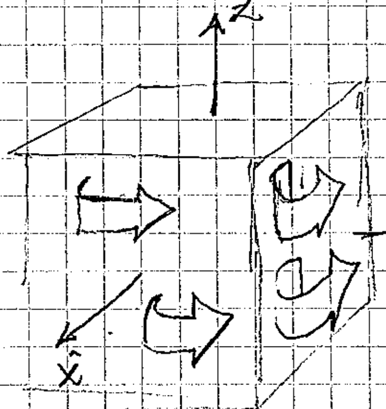
במצב זה נוכל להגדיר מגנטיזציה $\vec{M}$ כצפיפות הדיפולים המגנטיים

מבחינת יחידות: $[M] = \frac{[m]}{[L]^3} = \frac{[I \cdot S]}{[L]^3}$

נניח כעת חומר כזה: (מגנטיזציה אחידה)



בכלל, בכל נקודה בחומר הזה יש זרמים
בשני הכיוונים ולכן אין בסה"כ זרמים.
לא כך נכון חלק של השפה



נגדיר כדי לפשט כי סביב וקטור
מגנטיזציה $\vec{M} = M\hat{z}$
מרכיבים בפאה הניצבת לציר y
זרם בכיוון $(-\hat{x})$ ובפאה הניצבת
לציר $\hat{x}$ זרם בכיוון $\hat{y}$. כלל:

$$\vec{J}_B = \vec{M} \times \hat{n}$$

כאשר $\vec{J}_B$ הוא הזרם המשטחי (יחידות של $[J]\cdot[L]$), כל לפי
מבחינת יחידות כי:

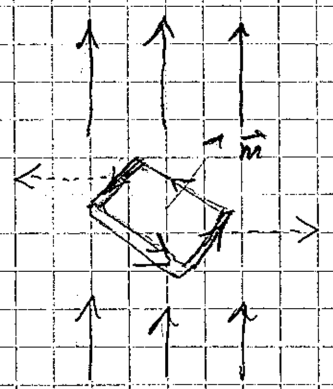
$$[M] = \left[\frac{I \cdot S}{L^3}\right] = [I \cdot L^{-1}] = [J \cdot L^2 \cdot L^{-1}] = [J \cdot L] = [J_B]$$

אפשר, ע"י הוכחה של מעבר לתחום קטן לקבל מקבילה ל $\rho_B = -\nabla P$ מהאלקטרו:

$$j_B = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

נסכם אם כן:

$$\vec{J}_B=\vec{\nabla}\times\vec{M} \quad , \quad \vec{K}_B=\vec{M}\times\hat{n}$$



כאמור (נניח) דיפול בודד בשדה מגנטי:
כל עוד m של המומנט המגנטי יפעל כוח
בהתאם לכיוון המקורי – כלומר המומנט
מומנט יפעל ליישר את המומנט המגנטי
בהתאם ל-$\vec{B}$

המשמעות היא שכאשר מפעילים שדה מגנטי חומר עשוי להגיב
באופן כזה שישנה את השדה המגנטי (באופן כללי בדרך
כלל יגדיל את השדה כי $\vec{m}$ יסתדר במקביל ל-$\vec{B}$)

אם כן כיוונים $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$ אלא שעכשיו $\vec{J}$ יהיה
גם $\vec{J}_F$ (הזרמים החופשיים) וגם $\vec{J}_B$ שנוצרים במגנטיזציה

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{J}_F+\vec{J}_B\right)$$

נזכור כי $\vec{J}_B=\vec{\nabla}\times\vec{M}$ ולכן לאחר הכל: $\nabla\times B=\mu_0 J_F+\nabla\times(\mu_0 M)$
נעביר אגפים ונחלק ב-μ_0 ונקבל:

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{M}\right)=\vec{J}_F$$

נזכור כי במערכת החשמלית קיבלנו $\nabla\left(\epsilon_0\vec{E}+\vec{P}\right)=\rho_F$

ושם הגדרנו $\vec{D}=\epsilon_0\vec{E}+\vec{P}$ וכך נעשה גם כאן:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}_F \qquad \boxed{\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{M}}$$

(שימו לב שכאן הסימן (−) ולא (+) וזה כי הפולריזציה המשטחית שנוצרת מחלישה את השדה בתוך, מגנטיזציה להפך מגבירה אותו)

כאמור (כמו) כי התגובה ליניארית לשדה המופעל מתאים כאן $\vec{H},\vec{M}$ ו-$\vec{B}$ וקושר את כולם ע"י קבועים

במקרה החשמלי למשל הגדרנו $\vec{P}=\chi_e\epsilon_0\vec{E}$ ורק קיבלנו

$$\vec{D}=\epsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\epsilon_0(1+\chi_e)\vec{E}=\epsilon\vec{E}$$

גם כאן נרצה להגדיר משהו דומה כי μ והוא דומה ל-μ_0, אבל כיוון שכמו במקרה החשמלי אין הפיכה ב- $\mu_0<\mu$ (המקרה הסטנדרטי)

נגדיר $\vec{H}=\mu^{-1}\vec{B}$

כמו כן μ מתקשר לסוספטביליות:

$$\vec{H}=\mu^{-1}\vec{B}\Longrightarrow\mu\vec{H}=\vec{B}\Longrightarrow\mu\vec{H}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$$

נגדיר $\vec{M}=\chi_m\vec{H}$ (בצורה מאד מבולבלת כאן χ מדבר במונחי "שדה בסתברה" ולא בשדה הסיבתי) ורק

$$\mu\vec{H}=\mu_0(1+\chi_m)\vec{H}\Rightarrow\mu=\mu_0(1+\chi_m)$$

סיכום: $\vec{H}=\mu_0^{-1}\vec{B}-\vec{M}$ / $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_F$

$$\vec{B}=\mu\vec{H}\quad,\quad\mu=\mu_0(1+\chi_m)\quad,\quad\vec{M}=\chi_m\vec{H}$$

המעבר בין שני תווכים

מתנאי $\nabla\cdot B=0$: $B_{\perp,1}=B_{\perp,2}$

מתנאי $\nabla\times H=0$ (בהעדר זרמים חופשיים) $H_{1,\parallel}=H_{2,\parallel}$

שאלה 1

גליל אינסופי ברדיוס a עשוי מחומר מגנטי בעל μ. בגליל זורם זרם אחיד I.

א. מהו השדה המגנטי בכל המרחב?

פתרון: $\vec\nabla\times\vec H = \vec J_F \Rightarrow \int_S \nabla\times H\, ds = \int_S J_F\, ds$

ולאחר שימוש במשפט סטוקס:

$$\oint_{\partial S} \vec H\cdot d\vec l = \int_S \vec J_F\cdot d\vec s$$

נבחר לולאת אמפר ברדיוס r, בלולאה הנ"ל H אחיד מטעמי סימטריה (נסיק!)

$$2\pi r H(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^2 I \qquad \text{עבור } r\le a$$

$$2\pi r H(r) = I \qquad \text{עבור } r>a$$

כעת נשתמש בכך ש- $\vec B = \mu\vec H$ ולכן:

$$\vec B = \begin{cases} \mu\frac{rI}{2\pi a^2}\hat\theta & r\le a \\ \mu_0\frac{I}{2\pi r}\hat\theta & a<r \end{cases}$$

שים לב כי כאשר $a<r$ $\mu=\mu_0$ ושינינו את הנוסחה המקורית כמו בר"ל (נוסח!)

ב. מהם הזרמים המושרים?

עבור $\vec M = \chi_m\vec H$ כאשר $\chi_m = \frac{\mu}{\mu_0} - 1$ ולכן

בתוך הגליל מתקיים:

$$\vec M = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\frac{rI}{2\pi a^2}\hat\theta$$

מחוץ לגליל כמובן שאין $\vec M$ כלל ולכן

$$\vec{M}=\begin{cases}\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\frac{rI}{2\pi a^2}\hat{\theta} & r<a\\ 0 & r>a\end{cases}$$

עכשיו נמצא זרמים מושרים בתוך הגליל של סמך $\vec{J}_B=\vec{\nabla}\times\vec{M}$

ועל השפה של סמך $\vec{K}_B=\vec{M}\times\hat{n}$

$$\vec{J}_B=\vec{\nabla}\times\vec{M}=\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\frac{I}{2\pi a^2}\left[\nabla\times(r\hat{\theta})\right]=\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\frac{I}{2\pi a^2}\left[\nabla\times(x\hat{y}-y\hat{x})\right]$$

$$=\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\frac{I\hat{z}}{\pi a^2}\longrightarrow$$

זרם מושרה אחיד
בכיוון הזרם המקורי

המושר בשפה שלילי

$$\vec{K}_B=\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\frac{I}{2\pi a}\hat{\theta}\times\hat{r}=\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\frac{(-I)}{2\pi a}\hat{z}$$

נשים לב כי הזרם המושרה הכולל בפנים הוא!

$$I_{in}=\pi a^2\cdot\vec{J}_B=\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)I\hat{z}$$

ומבחוץ

$$I_{out}=2\pi a\cdot\vec{K}_B=\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)(-I)\hat{z}$$

ולכן בסה"כ הזרמים המושרים בפנים ובחוץ מתבטלים
וזה הסיבה שהשדה המגנטי מחוץ לגליל אינו מושפע

שאלה 2 ; מועד ב' 2011 ב 4

גליל מוליך חלול עשוי מחומר מגנטי. הרדיוס הפנימי R_1 והחיצוני R_2
שדה המגנטיזציה בחומר

$$\vec{M} = \frac{\alpha}{r}\hat{r} + \frac{\beta}{r}\hat{\theta}$$

א. מהי צפיפות הזרם הקשור $\vec{J_b}$ בכל המרחב (לא J_f)

$$\vec{J_b} = \vec{\nabla}\times\vec{M} = \vec{\nabla}\times\left(\frac{\alpha}{r}\hat{r}+\frac{\beta}{r}\hat{\theta}\right) \overset{(*)}{=} \dots$$

$$-\underbrace{\frac{\partial M_\theta}{\partial z}}_{0}\hat{r} + \underbrace{\frac{\partial M_r}{\partial z}}_{0}\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\underbrace{\frac{\partial(rM_\theta)}{\partial r}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial M_r}{\partial \theta}}_{0}\right)\hat{z} = 0$$

שקיבלנו אם כן כי אין כלל זרמים קשורים (נפחיים)

תוצאה זו לא אמורה להפתיע אותנו שכן כבר הראינו בעבר ש
$\nabla\times\left(\frac{\hat{\theta}}{r}\right) = 0$.

עכשיו נעבור לצפיפות משטחית !

$$\vec{K_b} = \vec{M}\times\hat{n}$$

בשפות רק מרכיב בכיוון $\hat{r}$ לכן רק החלק $\hat{\theta}$ תורם

עבור החלק הפנימי $(\hat{n} = (-\hat{r}))$;

$$\vec{K}_{in} = \frac{\beta}{r}\hat{\theta}\times(-\hat{r}) = \frac{\beta}{r}\hat{z} = \frac{\beta}{R_1}\hat{z}$$

עבור החלק החיצוני $(\hat{n} = \hat{r})$

$$\vec{K}_{out} = \frac{\beta}{r}\hat{\theta}\times\hat{r} = \frac{\beta}{R_2}(-\hat{z})$$

---

* בקואורדינטות גליליות

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{z}$$

ט. מהו השדה המגנטי בכל המרחב

ומצאנו שם כי ברדיוס R_1 יש צפיפות זרם משטחי $\frac{B}{R_1}\hat{z}$

לכן הזרם הכולל $2\pi B\hat{z}$

ברדיוס R_2 צפיפות הזרם המשטחית $-\left(\frac{B}{R_2}\right)\hat{z}$

ולכן הזרם הכולל $-2\pi B\hat{z}$

שים לב כי $\nabla\times B=\mu_0(J_F+J_B)$ ובמקרה שלנו $J_F=0$

לכן $\nabla\times B=\mu_0 J_B$. נבחר לולאה ברדיוס r ונשתמש באמפר

כאשר אנחנו ברדיוס $r<R_1$ לא מקיפים שום זרם ⇐ $B=0$

" " $R_1<r<R_2$ מקיפים זרם $2\pi B\hat{z}$ ⇐ ;

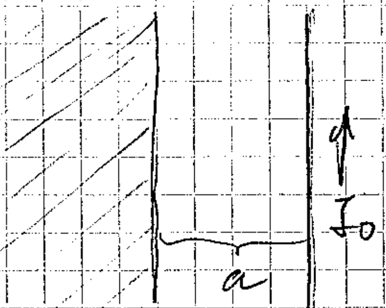
$$B=\frac{\mu_0 I_{in}}{2\pi r}\hat{\varphi}=\frac{\mu_0 B}{r}\hat{\varphi}$$

ואילו עבור רדיוס $r>R_2$ מקיפים זרם כולל 0

נסכם:

$$\vec{B}=\begin{cases}\frac{\mu_0 B}{r}\hat{\varphi} & R_1<r<R_2\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

דוגמא 3



בחצי המרחב $X<0$ ריק. בחצי המרחב $X>0$ יש חומר בעל מקדם פרמאביליות μ. ב- $X=a$ עובר תיל מקביל לציר $\hat{z}$ ובו זרם $I_0\hat{z}$. מהו השדה המגנטי בכל המרחב.

פתרון

נזכור כי $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\mu\vec{J}$, אבל $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ ולכן

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\mu_0\mu\vec{J} \longrightarrow \nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}=\mu_0\mu\vec{J}$$

נזכור כי ל- A מותר להוסיף פונקציה סקלרית ולכן נוכל לבחור כי $\nabla\cdot\vec{A}=0$ ולכן

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\mu\vec{J} \longrightarrow \nabla^2 A_i=\frac{\partial^2 A_i}{\partial i^2}=-\mu_0\mu J_i \quad \Big|\ i\in\{x,y,z\}$$

אנו רואים כי A_x, A_y ו- A_z מקיימים באופן כללי משוואת פואסון/לפלס פואסון $\Longleftarrow$ נוכל להשתמש בשיטת הדמויות.

אבל הסיפור לא כל כך פשוט. בד"כ השתמשנו בשיטת הדמויות כאשר היה לנו משטח בו הפוטנציאל קבוע. הפעם אין לנו משהו כזה. תנאי השפה שלנו במקרה הזה יהיה התנאי לפיו $B_\perp$ ו- $H_\parallel$ עוברים חלק.

נתחיל עם חצי המרחב $X<0$. מותר לנו לשנות דברים בחצי המרחב $X>0$. נשים שם תיל עם דמות I_1 ב- $X=-a$
(כשאין במקום החומר בעל מגנטיזציה)

(x,y)

$I_1\,(a,0)$ $\quad$ $I_0\,(a,0)$

⑨ כעת נחשב את השדה המגנטי בנקודה שרירותית (x,y)!

$$\vec{B}_{(x,y)} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r_0}\hat{\theta}_0 + \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}\hat{\theta}_1$$

כאשר $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_0$, r_1 ו- r_0 מסמנים מרחקים, וקטורים מ- I_0 ו- I_1.

$$\vec{B}^{x>0}_{(x,y)} = \frac{\mu_0 I_0\left[(x-a)\hat{y} - y\hat{x}\right]}{2\pi\left[(x-a)^2+y^2\right]} + \frac{\mu_0 I_1\left[(x+a)\hat{y} - y\hat{x}\right]}{2\pi\left[(x+a)^2+y^2\right]}$$

כאשר במקרה זה כמובן $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

כדי לפתור במצב המרחב $x<0$ נשים לב כי במקום זרם I_0 מרגיש זרם I_2, לפיכך נקבל

$$\vec{B}^{x<0}_{(x,y)} = \frac{\mu I_2\left[(x-a)\hat{y} - y\hat{x}\right]}{2\pi\left[(x-a)^2+y^2\right]}$$

כאשר נשים לב כי כאן יש מוליך ב- μ $\left(\vec{H} = \vec{B}/\mu\right)$

נציב כעת $x=0$ ונקבל את $\vec{B}$ ואת $\vec{H}$ עבור $x \gtrless 0$;

	$x>0$	$x<0$
$\vec{B}$	$\frac{\mu_0}{2\pi}\left[\frac{I_0(-a\hat{y}-y\hat{x})}{a^2+y^2} + \frac{I_1(a\hat{y}-y\hat{x})}{a^2+y^2}\right]$	$\frac{\mu I_2}{2\pi}\,\frac{-a\hat{y}-y\hat{x}}{a^2+y^2}$
$\vec{H}$	$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{I_0(-a\hat{y}-y\hat{x})}{a^2+y^2} + \frac{I_1(a\hat{y}-y\hat{x})}{a^2+y^2}\right]$	$\frac{I_2}{2\pi}\,\frac{-a\hat{y}-y\hat{x}}{a^2+y^2}$

נסמן $R_1^2 = (a^2+y^2)$ ונדרוש כי $B_\perp$ (בכיוון $\hat{x}$) יעבור חלק

וכן ש- $H_\parallel$ (בכיוון $\hat{y}$) יעבור חלק;

$$\underline{\underline{B_\perp}}\quad \frac{\mu_0}{2\pi R^2}\cdot(-y\hat{x})\cdot\left[I_0+I_1\right] = \frac{\mu}{2\pi R^2}(-y\hat{x})\cdot I_2 \Rightarrow \mu_0(I_0+I_1) = \mu I_2$$

$$\underline{\underline{H_\parallel}}\quad \frac{1}{2\pi R^2}\cdot(a\hat{y})\cdot\left[I_0 - I_1\right] = \frac{1}{2\pi R^2}(-a\hat{y})\cdot I_2 \Rightarrow I_0 - I_1 = I_2$$

(10) קיבלנו אם כן שתי משוואות

$$I_0 - I_1 = I_2$$
$$I_0 + I_1 = \mu_r I_2$$
$$\Rightarrow \boxed{I_1 = \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}\right) I_0 \qquad I_2 = \left(\frac{2}{\mu_r + 1}\right) I_0 \qquad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}}$$

נשים לב כי תנאי השפה נתונים לגבי $\vec{B}$ (ו- $\vec{H}$) שמתקיים טוב על השפה ובהבדל מכל קודם $\vec{B}$ קיבל תנאי שפה ולכן את $\vec{A}$, כלומר $\vec{A}$ מקיים תנאי שפה ולכן סימטרי

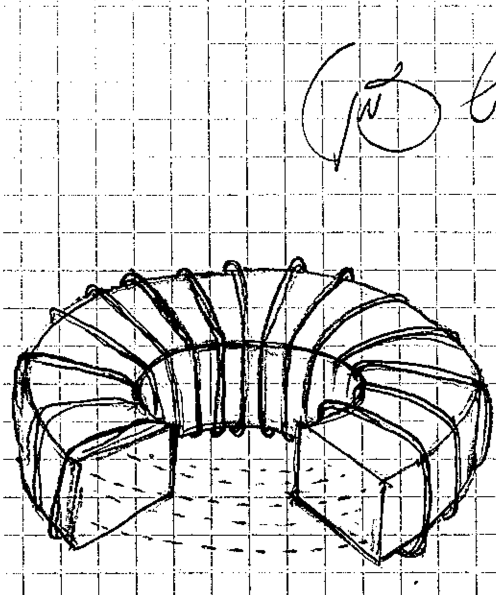
כעת נוכל לחשב שדה מגנטי בכל נקודה:

$$\cancel{\vec{B}_{(x,y)} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R^2}\left[(-a\hat{y} - y\hat{x}) + \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}\right)(a\hat{y} - y\hat{x})\right] & x>0 \\ \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R^2}\left[\left(\frac{2\mu_r}{\mu_r + 1}\right)(-a\hat{y} - y\hat{x})\right] & x<0 \end{cases}}$$

$$\vec{B}_{(x,y)} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\left[\frac{(x-a)\hat{y} - y\hat{x}}{(x-a)^2 + y^2} + \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}\right)\frac{(x+a)\hat{y} - y\hat{x}}{(x+a)^2 + y^2}\right] & x>0 \\ \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\left[\left(\frac{2\mu_r}{\mu_r + 1}\right)\frac{(x-a)\hat{y} - y\hat{x}}{(x-a)^2 + y^2}\right] & x<0 \end{cases}$$

קל לראות כי כאשר $\mu_r = 1$ אנו מקבלים התוצאה הצפויה עבור תיל נושא זרם בריק. כמו כן נשים לב כי עבור $\mu_r = 0$ (התאמה בה הדיאמגנטיה מבטלת את השדה המגנטי $\rightarrow \chi_m = -1$) אנו מקבלים שדה מתאפס בתוך החומר

שאלה 4 - טורוס (עם ליבת μ)



נתונה כריכת טורוס בעלת N כריכות
המקיפות ליבה העשויה מחומר בעל
מגנטיזציה μ. (הנחה שהפיזור מלאה)
שטח החתך הוא $a\times a$ ורדיוס הטבעת b
($b\gg a$). הטורוס נושא זרם I.
מצאו את וקטור המגנטיזציה $\vec M$ ואת $\vec J_B$ בכל המרחב

נזכור כי: $\vec\nabla\times\vec H=\vec J_F$ משוואה זו מקבילה של $\vec H$ לזרמים
החופשיים. כלומר ללולאה שמספר כריכות הקווים המקוריים (בגלל
כיוון שלאורך קווים אלו (כמו ל-B קבוע) ורק נפסק!

$$\int(\vec\nabla\times\vec H)\,d\vec s=\oint\vec H\,d\vec l=\int\vec J_F\,d\vec s\Rightarrow$$

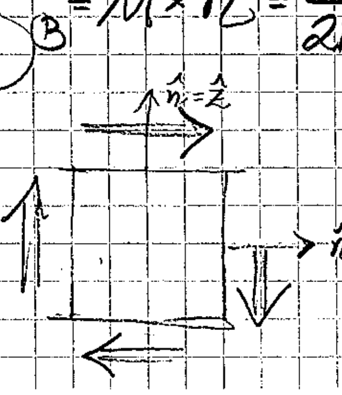
בתוך הטורוס (מצאנו), $H=\frac{NI}{2\pi r}\hat\theta$ ומחוץ לטורוס $H=0$.

על סמך $\vec H$ נמצא את $\vec M$: $\vec M=\chi\vec H$ | $\chi=\frac{\mu}{\mu_0}-1$

כעת נמצא את הזרמים הקשורים
$\vec J_B=\vec\nabla\times\vec M=\frac{NI\chi}{2\pi}\nabla\times\left(\frac{\hat\theta}{r}\right)=0$ שלצורתו מתקיימים זרמים בנפח;
כלומר בשום מקום אין זרמי נפח, אך ייתכנו זרמים על שפת
הטורוס

$$\vec K_B=\vec M\times\hat n=\frac{NI\chi}{2\pi r}\hat\theta\times\hat n\Rightarrow$$

יש כיוון הזרמים שמצאנו לפי הציור ($\Rightarrow$)



כך נמצא כי הזרמים המשטחיים יוצרים
שדה המגנטי לצד שדה הזרם המקורי

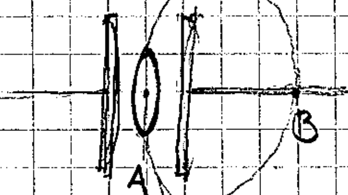
זרם העתקה

נפתור שאלה פשוטה המובילה לזרם העתקה:

נתון מעגל RLC מוזן ($V(t)=V_0\cos\omega t$). הקבל הוא קבל לוחות המורכב משתי דסקיות מוליכות בעלות רדיוס a המרוחקות מרחק d זו מזו. בין הדסקיות יש חומר בעל מקדם דיאלקטרי ε.

מצא את השדה המגנטי בין לוחות הקבל (אמפליטודה)

כשבאו לפתור את השאלה נתקלו בבעיה למה בכלל יש זרם העתקה.



נניח קבל לוחות אשר נטען בין לוחותיו הלוך ושוב

ומסביב יש שדה מגנטי ע"פ: $\vec\nabla\times\vec B=\mu_0\vec J$

אומנם נתקלים בבעיה - נסתכל על לולאה מסביב קטנה

בחוק ונשאל מהו $\oint B\,dl=\int\nabla\times B\,da$ על פני מעטפת. על המשטח דרך נקודה B

מקבלים שיש זרם ולכן $\int\nabla\times\vec B\,da=\mu_0 I\neq0$, לעומת זאת אם משטח

על הלולאה דרך נקודה A אין זרם - מה קורה?

מקסוול הוא שהבין שיש להכניס תיקון לחוק אמפר: $\vec\nabla\times\vec B=\mu_0\vec J+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec E}{\partial t}$

כך במעבר שבין הלוחות עדיין השדה משתנה עם הזמן ולכן שדה חשמלי משתנה

יוצר שדה מגנטי. הגודל $\varepsilon_0\frac{\partial\vec E}{\partial t}$ מתנהג גם כן כמו זרם

וזכה לשם "זרם העתקה".

נחזור לשאלה שלנו

הקיבול של הקבל הוא: $C=\varepsilon\frac{\pi a^2}{d}$ ולכן המתח בהינתן מטען Q

הוא $V=\frac{d}{\varepsilon\pi a^2}Q$ ומכאן שהשדה החשמלי: $E=\frac{Q}{\pi a^2\varepsilon}$

לסיכום:

$$\vec\nabla\times\vec B=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec E}{\partial t}=\frac{\mu_0\varepsilon_0}{\pi a^2\varepsilon}\dot Q=\frac{\mu_0\varepsilon_0}{\pi a^2\varepsilon}I$$

לכן;

$$\nabla\times B=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\Rightarrow\oint B\,dl=\mu_0\varepsilon_0\int\frac{\partial E}{\partial t}\,ds$$

עבור רדיוס r $(0\le r\le a)$ נקבל:
$$2\pi r B_{(r)}=\frac{\mu_0\varepsilon_0}{\pi a^2\varepsilon}I\cdot\pi r^2$$

$$\Rightarrow\boxed{B_{(r)}=\frac{\mu_0(\varepsilon_0/\varepsilon)I}{2\pi a^2}r}$$

לפי הזרם I נקבל כי סגור
$$C^{-1}Q+R\dot{Q}+L\ddot{Q}=V_0e^{i\omega t}$$

$$Q_0e^{i\omega t}\left[C^{-1}+i\omega R-\omega^2L\right]=V_0e^{i\omega t}$$

$$Q_{(t)}=\frac{CV_0}{(1-\omega^2LC)+i\omega RC}e^{i\omega t}$$

$$\Downarrow$$

$$I_{(t)}=\frac{i\omega CV_0}{(1-\omega^2LC)+i\omega RC}e^{i\omega t}$$

$$\cancel{I_0\left|\frac{\omega CV_0}{1-\omega^2LC+i\omega RC}\right|=\left|\frac{i\omega CV_0}{1-\omega^2LC+i\omega RC}\cdot\frac{1-\omega^2LC-i\omega RC}{1-\omega^2LC-i\omega RC}\right|=\left|\frac{\omega CV_0[(1-\omega^2LC)-i\omega RC]}{(\omega^2LC-1)^2+\omega^2R^2C^2}\right|=}$$

$$|I_{(t)}|^2=\frac{i\omega CV_0}{(1-\omega^2LC)+i\omega RC}\cdot\frac{-i\omega CV_0}{(1-\omega^2LC)-i\omega RC}=\frac{\omega^2C^2V_0^2}{(\omega^2LC-1)^2+\omega^2R^2C^2}$$

$$\Downarrow$$

$$|I|=\frac{\omega CV_0}{\sqrt{(\omega^2LC-1)^2+\omega^2R^2C^2}}$$

לכן האמפליטודה של B היא:

$$|B|=\frac{\mu_0\varepsilon_r^{-1}\omega CV_0}{2\pi a^2\sqrt{(\omega^2LC-1)^2+\omega^2R^2C^2}}r$$