קוסמולוגיה תרגול 4

קוסמוגרפיה (cosmography): תורת המרחקים

אנחנו רוצים למצוא את המרחק למערכת הנמצאת ב- redshift z.

אבל, כפי שנראה, המשימה הזו לא פשוטה כפי שהיינו חושבים, וזה נובע מהעובדה שהיקום מתפשט, ואז עצם פלט לעברי אור, אז עד שהאור הגיע אלי, מרחק הגוף ממני גדל.

נתחיל בלחשב את ה- co-moving distance (קרי, המרחק היום) בינינו לבין גלקסיה ב- redshift z. יש לזכור כי הפוטונים שאנחנו רואים עכשיו, שיש להם הסחה לאדום z, יצאו מהגלקסיה לפני זמן רב כאשר הגלקסיה הייתה קרובה יותר אלינו.

נתחיל בלהניח z קטן (כלומר גיל היקום (כשהפוטון יצא היה) $t \sim t_0$ כאשר $t_0 \simeq 13.7\,\mathrm{Gyr}$ גיל היקום כיום). נפתח את $a(t)$:

$$a(t) \simeq a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t-t_0)^2 + O(\Delta t)^3$$

סימון: $a(t_0) \equiv a_0$ $\quad \dot{a}(t_0) \equiv \dot{a}_0$ ונזכור כי $H(t) \equiv \dfrac{\dot{a}(t)}{a(t)}$.

נקבל:

$$a(t) \simeq a_0\left[1 + \frac{\dot{a}_0}{a_0}(t-t_0) + \frac{1}{2}\frac{\ddot{a}_0}{a_0}(t-t_0)^2\right] =$$

$$a_0 = 1 \quad = 1\cdot\left[1 + H_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\frac{\ddot{a}_0}{a_0}\left(\frac{a_0}{\dot{a}_0}\right)^2 H_0^2 (t-t_0)^2\right]$$

מגדירים קבוע חסר יחידות, הנקרא קבוע התאוצה (acceleration parameter)

$$\boxed{q \equiv -\frac{\ddot{a}\,a}{\dot{a}^2}}$$

סימן ה"−" נובע מסיבות היסטוריות, והוא קובע כי אם $q>0$ היקום מאט ו $q<0$ אם הוא מאיץ

ניזכר כי שבוע שעבר ראינו:

$$\dot{a}^2 = H_0^2\left[\Omega_{m_0} a^{-1} + \Omega_{r_0} a^{-2} + \Omega_{k_0} + \Omega_{\Lambda_0} a^2\right]$$

ולכן:

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = \frac{\frac{1}{2}\Omega_{m_0}a^{-1} - \Omega_{\Lambda_0}a^2 + \Omega_{r_0}a^{-2}}{\Omega_{m_0}a^{-1} + \Omega_{k_0} + \Omega_{\Lambda_0}a^2 + \Omega_{r_0}a^{-2}}$$

ולכן, כיום כאשר: $a = a_0 = 1$

$$q_0 = \frac{\frac{1}{2}\Omega_{m_0} - \Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{r_0}}{\underbrace{\Omega_{m_0} + \Omega_{k_0} + \Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{r_0}}_{=1}} = \frac{1}{2}\Omega_{m_0} - \Omega_{\Lambda_0} + \underbrace{\Omega_{r_0}}_{\text{זניח}} \approx \frac{1}{2}\Omega_{m_0} - \Omega_{\Lambda_0}$$

$$\boxed{q_0 \simeq \frac{1}{2}\Omega_{m_0} - \Omega_{\Lambda_0}}$$

עבור $\Omega_{m_0} \simeq 0.3$, $\Omega_{\Lambda_0} \simeq 0.7$ מתקבל $\boxed{q_0 \simeq -0.55 < 0}$

ולכן היקום מאיץ.

חזרה לעניינו:

קיבלנו

$$\boxed{a_{(t)} \simeq 1 + H_0(t-t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2 (t-t_0)^2}$$

$$a = \frac{1}{1+z} \longrightarrow z = a^{-1} - 1$$

$$\longrightarrow z_{(t)} \simeq \left[1 + H_0\Delta t - \frac{1}{2}q_0 H_0^2 \Delta t^2\right]^{-1} - 1 \simeq$$

$$\simeq \left[1 - \left(H_0\Delta t - \frac{1}{2}q_0 H_0^2\Delta t^2\right) + \frac{1}{2}\left(H_0\Delta t - \frac{1}{2}q_0 H_0^2 \Delta t^2\right)^2\right] - 1 \simeq$$

$$\boxed{z(t) \simeq -H_0\Delta t + H_0^2\left(1 + \frac{1}{2}q_0\right)\Delta t^2}$$

עבור z קטן, ההסחה לאדום ניתנת פשוט ע"י אפקט דופלר בעקבות מקור המתרחק מאיתנו במהירות $v \cong H_0 r$.

$$\boxed{z \equiv \frac{\nu_e - \nu_0}{\nu_0} = \frac{\Delta\nu}{\nu} \cong \frac{v}{c} = \frac{H_0 r}{c} \cong H_0(t_0 - t) = -H_0\Delta t}$$

זהו האיבר הלינארי בביטוי שקיבלנו לעיל;
כלומר מצאנו תיקון ראשון לאפקט דופלר!

ניתן להפוך את המשוואה שקיבלנו כדי לקבל את Δt
כפונקציה של z עד סדר שני:

$$(1+\tfrac{1}{2}q_0)(H_0\Delta t)^2-(H_0\Delta t)-z=0$$

$$H_0\Delta t=\frac{1}{2(1+\frac{1}{2}q_0)}\left[1\pm\sqrt{1+4z(1+\tfrac{1}{2}q_0)}\right]=\frac{1}{2(1+\frac{1}{2}q_0)}\left[1-\sqrt{1+4z(1+\tfrac{1}{2}q_0)}\right]$$

$$\Delta t=t-t_0<0$$

$$H_0\Delta t\simeq\frac{1}{2(1+\frac{1}{2}q_0)}\left[-2z(1+\tfrac{1}{2}q_0)+2z^2(1+\tfrac{1}{2}q_0)^2\right]\qquad (1+x)^{\frac{1}{2}}\simeq 1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2$$

$$\boxed{t_0-t=-\Delta t=\frac{1}{H_0}\left[z-(1+\tfrac{1}{2}q_0)z^2\right]}$$

<u>כעת נוכל לתרגם זאת למרחק:</u>

<u>המטריקה:</u>

$$ds^2=-c^2dt^2+a^2_{(t)}\left[du^2+S_k^2(u)\,d\Omega^2\right]$$

פוטון תמיד נע לעברנו במסלול רדיאלי שבו $d\Omega=0$
וכמו-כן המסלול "קו אור" כלומר:

$$ds^2=0=-c^2dt^2+a^2du^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{u=c\int_{t_e}^{t_0}\frac{dt}{a_{(t)}}}\Longrightarrow$$

co-moving distance the photon travelled to reach us!

אם נזכר בהגדרה שלנו לזמן הקונפורמי conformal time

$$d\eta=\frac{dt}{a_{(t)}}\Rightarrow\boxed{u=c\cdot\eta}\Longrightarrow$$

η הוא פשוט זמן התנועה של פוטון!

$$u_{(z)}=c\int_{t_e}^{t_0}\frac{dt}{a_{(t)}}=c\int_{t_e}^{t_0}(1+z)\,dt\simeq c\int_{t_e}^{t_0}\left[1-H_0(t-t_0)+(1+\tfrac{1}{2}q_0)H_0^2(t-t_0)^2\right]dt$$

ונעבור ל $\tau=t_0-t$ ונקבל:

$$u_{(z)} \simeq c\int_0^{t_0-t_e}\Big[1+H_0\tau+\underbrace{(1+\tfrac{1}{2}q_0)(H_0\tau)^2}\Big]d\tau \simeq c\int_0^{t_0-t_e}(1+H_0\tau)\,d\tau$$

נזניח את זה, כי נתעניין בביטוי ל- u

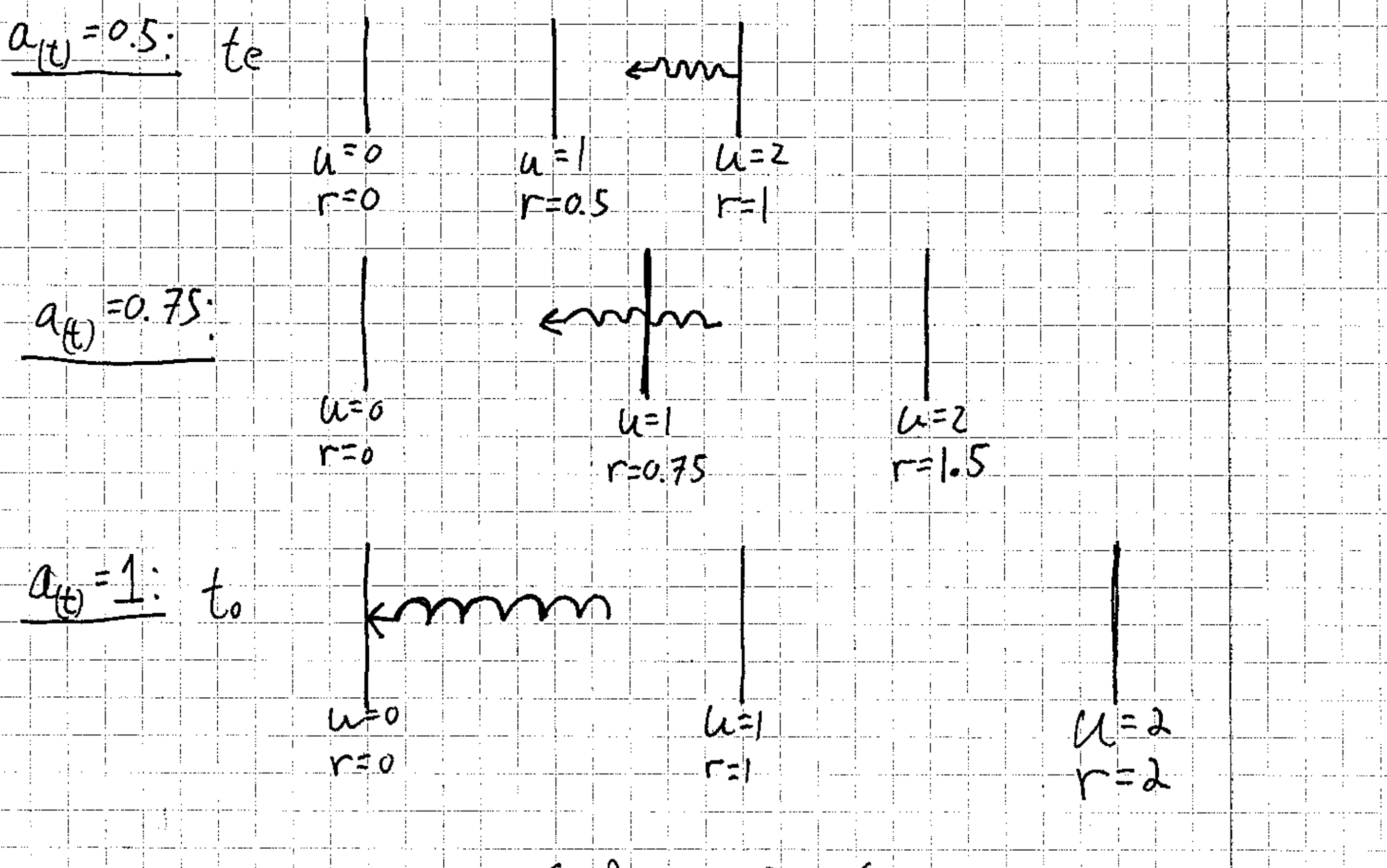
עד סדר שני ב- $(H_0\tau)$

$$u \simeq \underbrace{c(t_0-t_e)} + \underbrace{\tfrac{1}{2}cH_0(t_0-t_e)^2} \equiv d_{L.T} + \tfrac{1}{2}cH_0(t_0-t_e)^2$$

$d_{LT} \equiv$ Light Travel distance — תוספת הנובעת מהתפשטות היקום

זהו המרחק אותו עבר הפוטון

קיבלנו $u > d_{L.T.}$, כלומר מרחק הגוף מאיתנו היום גדול יותר מהמרחק אותו עבר הפוטון, וזה מכיוון שהיקום התפשט בינתיים. לדוגמא:



נמיר את הביטוי ל- u לביטוי סדר שני ב- z:

$$\boxed{u\simeq}\ \frac{c}{H_0}\left[z-(1+\tfrac{1}{2}q_0)z^2\right]+\frac{1}{2}\frac{c}{H_0}\left[z-(1+\tfrac{1}{2}q_0)z^2\right]^2 \boxed{\simeq \frac{c}{H_0}\left[z-\tfrac{1}{2}z^2(1+q_0)\right]}$$

(טוב, הסדר הנמוך ביותר הוא נובע מדופלר: $u \simeq r \simeq \frac{c}{H_0}z$

כך קיבלנו, עבור $z \ll 1$: $\quad u \simeq \frac{c}{H_0}\left[z - \frac{1}{2}(1+q_0)\cdot z^2\right]$

מרחק הגלקסיה מאיתנו כאשר הפוטון נפלט:

$$\boxed{d_e = a(z)\, u = \frac{u}{1+z} \simeq \frac{c}{H_0} z\left[1 - \frac{1}{2}(1+q_0)z\right]\cdot\left[1-z\right] \simeq \frac{c}{H_0} z\left[1 - \frac{1}{2}(3+q_0)z\right]}$$

עבור z כללי, לאו דווקא קטן, נוכל להשתמש בתוצאה משבוע שעבר:

$$u = \int_{t_e}^{t_0} c\,\frac{dt}{a(t)} = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{1}{a}\,\frac{da}{\dot a} = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{da}{a^2 H} = -c\int_{z_e}^{z_0=0} \frac{dz}{H}$$

$$a = \frac{1}{1+z} \Rightarrow \frac{da}{dz} = -a^2 = -\frac{1}{(1+z)^2}$$

$$u = c\int_{z_0=0}^{z_e} \frac{dz}{H(z)}$$

$$H^2(z) = \frac{\dot a^2}{a^2} = H_0^2\left[\Omega_{m_0} a^{-3} + \Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{k_0} a^{-2} + \Omega_{r_0} a^{-4}\right] =$$

$$= H_0^2\left[\Omega_{m_0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{k_0}(1+z)^2 + \Omega_{r_0}(1+z)^4\right]$$

$$\boxed{u(z) = \frac{c}{H_0}\int_0^z \frac{dz'}{\left[\Omega_{m_0}(1+z')^3 + \Omega_{r_0}(1+z')^4 + \Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{k_0}(1+z')^2\right]^{1/2}}}$$

שימו לב: $\quad \boxed{u(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} const \Longleftarrow \frac{du}{dz} \xrightarrow[z\to\infty]{} 0}$

כלומר ה- co-moving distance
עד לאופק הוא סופי
⇐ יש גודל סופי ליקום הנראה
(הקשר לפרדוקס אולברס)

(קל לראות שהביטוי שקיבלנו
למעלה ל- u מתקבל מפיתוח
של האינטגרנד לסדר ראשון ב- z
(עבור z קטן) והצבת ההגדרה
של q_0 שמצאנו מקודם.)

יש עוד שתי הגדרות חשובות למרחק בקוסמולוגיה,
מעבר ל- Co-moving distance:

(I) <u>Luminosity Distance</u>: תצפיתנים מודדים שטף של
קרינה המגיע אלינו מגלקסיה מרוחקת, F.
ביקום אוקלידי והומוגני, השטף F קשור להארה L
(Luminosity) האינטרינזית של המקור, שנמרחת על
על ספירה עם שטח: $\boxed{A} = \oiint a_0^2 \cdot S_k^2(u)\, d\Omega^2 = \boxed{4\pi a_0^2 S_k^2(u)}$

האור הגיע עד אלינו, כאשר $t=t_0$

בנוסף, התפשטות היקום משפיעה על
הפוטונים המגיעים אלינו בשתי דרכים:
(1) האנרגיה של כל פוטון קטנה:

$$\boxed{E_{obs}} = h\nu_{obs} = h\nu_{em} \cdot \frac{\nu_{obs}}{\nu_{em}} = \boxed{\frac{E_{em}}{1+z}}$$

(2) הזמן בין הגעה של 2 פוטונים סמוכים מתארכת יחסית
לזמן הפליטה שלהם:

$$\boxed{\Delta t_{obs} = (1+z)\,\Delta t_{em}}$$

$\Longleftarrow$ ההשפעה הכוללת על L:

$$\boxed{L_0} \sim \frac{E_0}{\Delta t_0} = \frac{E_e}{\Delta t_e (1+z)^2} = \boxed{\frac{L_e}{(1+z)^2}}$$

$$\boxed{F_0} = \frac{L_0}{4\pi \underbrace{a_0^2}_{=1} S_k^2(u)} = \boxed{\frac{L_e}{4\pi S_k^2(u)(1+z)^2}}$$

מגדירים $d_L \equiv$ Luminosity Distance כך ש: $F_0 = \frac{L_e}{4\pi d_L^2}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{d_L = S_k(u)(1+z)}$$

$$S_k(u) = \begin{cases} \sin(u) & k=1 \\ u & k=0 \\ \sinh(u) & k=-1 \end{cases}$$

עבור u קטן:

$$S_k(u) \simeq u - \frac{k}{6}u^3$$

עד סדר שני ב- z:

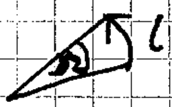
$$d_L \simeq u(1+z) \simeq \frac{c}{H_0} z\left[1-\tfrac{1}{2}(1+q_0)z\right]\left[1+z\right]$$

$$\boxed{d_L \simeq \underbrace{\frac{c}{H_0} z}_{\text{דופלר}}\underbrace{\left[1+\tfrac{1}{2}(1-q_0)z\right]}_{\text{תיקון בגלל הנחת פשטות}}}$$

II :Angular Diameter Distance

זהו גודל שקשור לזווית המרחבית ע"פ השמיים שהגלקסיה מכסה:

$$\underbrace{d_A}_{\text{מרחק}} \equiv \frac{l \rightarrow \text{אורך הקשת}}{\underbrace{d\Omega}_{\text{זווית}}}$$



מהמטריקה:

$$ds = a\cdot S_k(u)\cdot d\Omega = l$$

קשר בין u, d_L, d_A:

$$\boxed{d_A =} \frac{l}{d\Omega} = \boxed{\frac{S_k(u)}{1+z} = \frac{d_L}{(1+z)^2}}$$

ביקום שטוח: $S_k(u) = u$ ולכן:

$$d_A = \frac{c}{H_0}\cdot\frac{1}{1+z}\cdot\int_0^z \frac{dz'}{\left[\Omega_{m_0}(1+z')^3 + \underbrace{\Omega_{r_0}(1+z')^4}_{\text{זניח עד } z\simeq 10^4} + \Omega_{\Lambda_0}\right]} \longrightarrow \text{ביקום שטוח } \Omega_k = 0$$

עוד מרחק חשוב

Hubble Distance: $D_H = \frac{c}{H_0} \simeq 4.3$ Gpc

Co-moving volume

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2\left[du^2 + S_k^2(u)\left(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2\right)\right]$$

$$\Downarrow$$

אלמנט נפח מרחבי:

$$dV = (a\,du)\cdot(aS_k\,d\theta)\cdot(aS_k\sin(\theta)\,d\varphi)$$

$$dV = a^3 S_k^2(u)\sin(\theta)\,du\,d\theta\,d\varphi$$

;co-moving volume element

$$dV_c \equiv \frac{dV}{a^3} = S_k^2(u)\sin(\theta)\,du\,d\theta\,d\varphi$$

אז לאחר אינטגרציה זוויתית:

$$dV_c = 4\pi S_k^2(u)\,du$$

כזכור:

$$du = \frac{c}{H_0}\frac{dz}{\left[\Omega_{m_0}(1+z)^3 + \Omega_{r_0}(1+z)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_k(1+z)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$du = \frac{c}{H_0}\cdot\frac{dz}{E(z)} \Longleftarrow$$

$$\Downarrow$$

$$dV_c = 4\pi\frac{c}{H_0}\frac{S_k^2(u)}{E(z)}dz = 4\pi\frac{c}{H_0}\frac{d_A^2(1+z)^2\,dz}{E(z)}$$

angular diameter distance