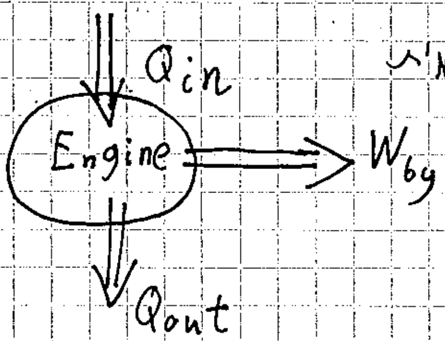
פיזיקה תרמית - תרגול 9

(I) מנוע סטירלינג

(II) מהירות הקול בגזים

(I) מנוע סטירלינג

ראיתם בכיתה, וגם ראינו בתרגול בשבוע שעבר, שאם נגדיר תהליך תרמודינאמי מחזורי של מערכת כלשהי, נוכל לחשוב על כך כמנוע שמקבלת חום מהסביבה, מבצעת עבודה על סביבה מסוימת ומקבלת פולטת חום לסביבה:



ה"מנוע" הוא מערכת תרמודינאמית המבצעת תהליך מחזורי. בסוף כל מחזור הוא חוזר למצבו ההתחלתי, ולכן נטו השינוי באנרגיה הפנימית שלו מתאפס (ראו דיון בתרגול של שבוע שעבר). לכן, $\Delta U_{engine}=0$

לכן, שימור אנרגיה כללי מכתיב לנו שמתקיים: $\boxed{Q_{in}=W_{by}+Q_{out}}$

מכניסים חום למערכת, ואז ניתן להוציא עבודה, במחיר של עודף חום שנפלט החוצה.

ראיתם בכיתה (נדבר על כך עוד שבוע הבא) שלעולם לא ניתן לקבל $Q_{in}=W_{by}$ כלומר $Q_{out}=0$. יש "עבודה מקסימלית" שניתן להפיק והיתרה "מתבזבזת" על לשנות את האנטרופיה של מאגרי החום.

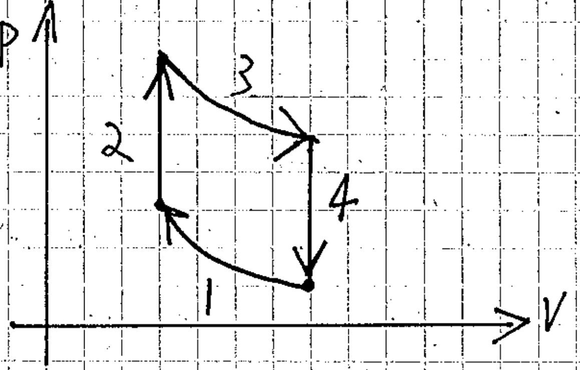
ניתן להגדיר את היעילות של מנוע בתור

$$\eta = \frac{W_{by}}{Q_{in}} = 1-\frac{Q_{out}}{Q_{in}} < 1$$

יעילות לעולם קטנה מאחד!

ראיתם בכיתה את הפיתוח של מנוע קרנו. לאחר שהוכחתם מהי היעילות המקסימלית שיכולה להתקבל, בניתם את המנוע של קרנו וראיתם שאכן יעילותו היא ביעילות יעילות מקסימלית. הבעיה היא שההספק של מנוע **קרנו** הוא אפסי (זה המחיר של תהליך **הפיך** ← הוא לוקח הרבה מאוד **זמן** ⊛) אנו נראה כעת מנוע יעיל פחות, אך עם היתרון שניתן לשלוט על ההספק שלו במידה מסויימת (את זה לא נראה כאן אבל ניתן לקרוא על כך ב- Wikipedia)

כזכור, במנוע קרנו היו 2 תהליכים איזותרמיים ושני תהליכים אדיאבטיים. אנו **נבחר** מנוע שבו שני תהליכים איזותרמיים ושני תהליכים איזוכוריים. התהליך המחזורי במפורש:



1. דוחסים את הגז בצימוד לאמבט חום כך שהדחיסה היא איזותרמית (חום יוצא, טמפרטורה קבועה T_c)
2. מאלצים את הנפח להיות קבוע ומצמדים לאמבט חום כך שהבוכנה מתחממת (הנפח קבוע V_1)
3. מצמדים לאמבט חום, ונותנים לבוכנה להתפשט באופן איזותרמי (חום נכנס, טמפ' קבועה T_H)
4. מאלצים את הנפח להיות קבוע ומצמדים לאמבט חום כך שהבוכנה מתקררת (הנפח קבוע V_2)

⊛ על מנת להעביר חום מהמאגרים למערכת ובחזרה בצורה הפיכה, אנחנו מעבירים חום רק בתהליכים איזותרמיים, כאשר למערכת ולמאגר אותה טמפ' (עם הפרש אינפיניטסימלי). תהליך כזה אורך זמן מאוד ארוך (פרופורציוני ל- $\frac{1}{\Delta T}$, $\Delta T =$ הפרש בין המאגר למערכת)

כדי לחשב את היעילות, נניח שהגז במכונה הוא גז אידיאלי עם f דרגות חופש, ונחשב מהו החום שנכנס ומהי העבודה שהמערכת ביצעה. התהליכים בהם נכנס חום למערכת הם תהליכים 2 ו-3. לכן:

$$đQ_{in} = đQ_2 + đQ_3 = \left[dU_2 - đW_2^{on}\right] + \left[dU_3 - đW_3^{on}\right] =$$

$$= dU_2 - đW_3^{on} = dU_2 + PdV_3 = dU_2 + \frac{Nk_BT_H}{V}dV_3$$

כאשר השתמשנו בכך ש- $dU_3=0$ בגלל שהתהליך איזותרמי $\left(dU = \frac{f}{2}Nk_BdT = 0\right)$, ובכך שהעבודה בתהליך 2 מתאפסת כי התהליך איזוכורי: $đW_{on} = -PdV$

$$\Delta Q_{in} = \frac{f}{2}Nk_B(\Delta T) + Nk_BT_H\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} \Leftarrow$$

$$\boxed{\Delta Q_{in} = \frac{f}{2}Nk_B(T_H - T_C) + Nk_BT_H\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

העבודה הכוללת נעשית בתהליכים האיזותרמיים:

$$đW^{by} = đW_1^{by} + đW_3^{by}\left(+\underbrace{dW_2^{by} + dW_4^{by}}_{=0}\right) = +PdV_1 + PdV_3$$

(כי $dV_2 = dV_4 = 0$ תהליכים איזוכוריים)

$$đW^{by} = \frac{Nk_BT_C}{V}dV_1 + \frac{Nk_BT_H}{V}dV_3$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta W^{by} =} Nk_B\left[T_C\int_{V_2}^{V_1}\frac{dV}{V} + T_H\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}\right] = \boxed{Nk_B(T_H - T_C)\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

מכאן נקבל את יעילות המנוע:

$$\eta = \frac{\Delta W^{by}}{\Delta Q^{in}} = \frac{N k_B (T_H - T_c) \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{\frac{f}{2} N k_B (T_H - T_c) + N k_B T_H \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

נסמן ב: $r \equiv \frac{V_2}{V_1} > 1$ את יחס הנפחים (יחס הדחיסה)

וב: $\eta_c = 1 - \frac{T_c}{T_H}$ את היעילות של מנוע קרנו הפועל בין אותם אמבטי חום.

נקבל:

$$\boxed{\eta_S = \eta_c \cdot \frac{1}{1 + \eta_c \cdot \frac{f}{2\ln(r)}}}$$

η_S ← sterling

כאשר $r = \frac{V_2}{V_1} \to \infty$ מקבלים כי $\frac{1}{\ln(r)} \to 0$

ומקבלים בחזרה את היעילות של מנוע קרנו. אבל, בתהליך הזה, אנו מבלים הרבה מאוד זמן בהתפשטות ודחיסה איזו-תרמיים, שבהם אנחנו מעבירים חום בין המערכת לבין מאגרים עם הפרשי טמפרטורה אינפיניטסימליים. בדומה למנוע קרנו, זהו תהליך עם הספק אפס, שכן הוא אורך זמן אינסופי.

מאידך, כאשר $r = \frac{V_2}{V_1} \to 1$ מקבלים $\frac{1}{\ln(r)} \to \infty$

והיעילות של המנוע שואפת לאפס. מצד שני, במצב הזה תהליכי ההתפשטות והדחיסה הם מאוד קצרים, כי יחס הנפחים הוא קטן. זה מאפשר לנו להעלות את ההספק כי נבלה פחות זמן בהתפשטות ובדחיסה האיזותרמיים.
אבל, מצד שלישי, בגלל שיחס הנפחים הוא קטן, נצטרך לבצע את התהליך הרבה פעמים כדי להפיק עבודה.
בסה"כ, ע"י שליטה בפרמטר r, ניתן לווסת בין יעילות להספק.

II מהירות הקול, מהירות התקדמות גלי לחץ

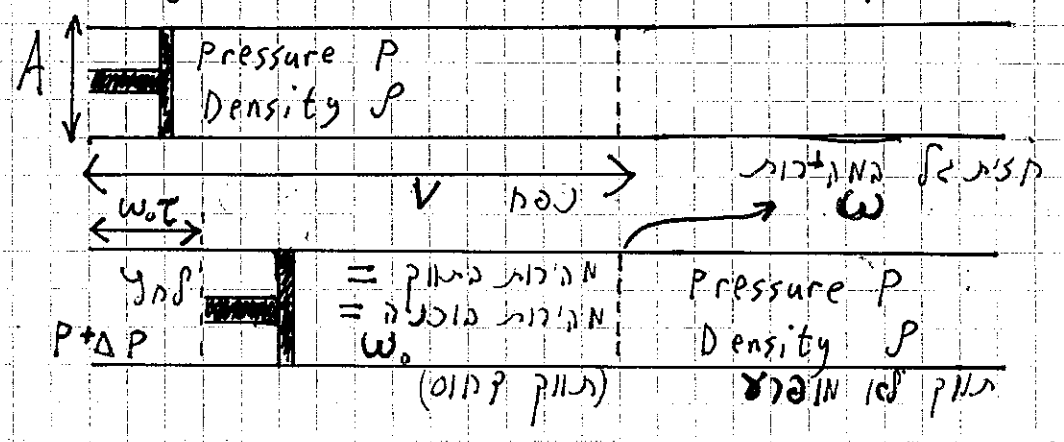
"גל קול" הוא הפרעה בלחץ של חומר מסויים שמתקדמת אורכית בתווך שבו הוא נמצא. כלומר, אם דוחסים את האויר לאורך ציר $\hat{x}$, אז ההפרעה (האזור הצפוף יותר) מתקדמת בעצמה בכיוון $\hat{x}$ (ליתר פירוט, ראו קורס בגלים).

בדרך הזאת, אנחנו שומעים! כשמשהו עושה צליל או קול, זה מרעיד את האויר ויוצר אזורים עם לחץ גבוה ואזורים עם לחץ נמוך. ההפרעה הזאת יוצרת גל שמגיע לאוזננו ונקלט ע"י עור התוף באוזניים שלנו.

בלי אויר, למשל בחלל בוואקום, לא היינו שומעים קול, כי לא היה אויר שדרכו ההפרעה בלחץ/בצפיפות היתה יכולה לנוע: In space, no one can hear you scream

נרצה להעריך את מהירות ההתקדמות של גלים כאלה בגז אידיאלי, עם אינדקס אדיאבטי γ.

לשם המחשה ספציפית, נדון בבעיה הבאה:
בוכנה עם שטח חתך A דוחסת אויר שנמצא בשפופרת חצי-אינסופית עם אותו שטח חתך. הבוכנה נעה במהירות קבועה w_0. ההפרעה שנוצרת (הגל) נעה במהירות קבועה, w, אותה נרצה למצוא. לפני ההפרעה, הגז נמצא בלחץ קבוע P ובצפיפות אחידה ρ.



דוחפים את הבוכנה באמצעות לחץ $P+\Delta P$ שמופעל משמאל. כעבור זמן τ הבוכנה נעה ימינה מרחק $\omega_0\tau$ ומחזית הגל התקדמה ימינה מרחק $\omega\tau$.

ביחס לגז שלפני תחילת התהליך מילאו נפח כולל: $V=A\omega\tau$ (כל הנפח עד לקו המקווקו מימין בציור העליון).

המסה של הגז הזה היא: $M=\rho A\omega\tau$.

כאשר חזית הגל ממשיכה להתקדם, היא "מספחת" עוד ועוד מסה מאחוריה, בקצב של:

$$\boxed{\frac{dM}{d\tau}=\rho A\omega}$$

הגז שמאחורי חזית הגל, נדחס ומתחיל לנוע ימינה יחד עם הבוכנה במהירות קבועה ω_0 (מניחים שההגעה לשיווי משקל לאחר שחזית הגל חולפת היא מאוד מהירה). אם הגז התחיל ממנוחה (כלומר ללא מהירות קוהרנטית, אבסולוטית. לא מדובר על פלוקטואציות התרמליות במהירות, שקיימות גם לאחר הדחיסה), אז השינוי בתנע של הגז בעת הדחיסה הוא:

$$\dot{P}=\omega_0\dot{M}=\rho A\omega\omega_0$$

על הגז הזה יש כוח ימינה של $A(P+\Delta P)-AP=A\Delta P$ הנובע מהפרש הלחצים בין קצוות העמוד.

חוק שני של ניוטון נותן לנו:

$$A\Delta P=\rho A\omega\omega_0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta P=\rho\omega^2\cdot\frac{\omega_0}{\omega}}$$

כעת נשים לב שנפח עמוד הגז לפני הדחיסה הוא $V=A\omega\tau$ אך הוא נדחס בשיעור $(-\Delta V)=A\omega_0\tau$

לכן,

$$-\frac{\Delta V}{V} = \frac{A\omega_0\tau}{A\omega\tau} = \frac{\omega_0}{\omega}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta P = -\rho\omega^2\frac{\Delta V}{V}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega =}\sqrt{-\frac{1}{V}\frac{\Delta P}{\Delta V}\cdot\frac{1}{\rho}} \longrightarrow \boxed{\sqrt{-V\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{1}{\rho}}}$$

והשאלה היא מה נשאר קבוע כאשר עושים את הנגזרת $\frac{\partial P}{\partial V}$?

ניוטון, שהיה הראשון שהגיע לביטוי הנ"ל עבור ω, היה סבור שהתהליך איזותרמי, ולכן

$$-V\frac{\Delta P}{\Delta V} \longrightarrow -V\frac{\partial P}{\partial V}\Big|_T$$

<u>עבור גז אידיאלי, זה נותן:</u> $P = \frac{Nk_BT}{V}$

$$-V\frac{\partial P}{\partial V}\Big|_T = P \Longrightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{P}{\rho}}}$$

אך מסתבר שזה לא התאים לניסויים שבהם מדדו את מהירות הקול.

מסתבר שעבור כל חומר נורמאלי בתנאי מעבדה סבירים, התהליך הנ"ל הינו <u>אדיאבטי</u>, כיון שהזמן שלוקח לחום לעבור בתווך הרבה יותר ארוך מהזמן שלוקח לתנודות הגל להתקדם. ניתן להראות זאת במפורש, אך לא נעשה זאת כאן (מי שמעוניין, שיקרא בספר של
Zemansky and Dittman, "Heat and Thermodynamics", page 119

<u>לכן:</u> $\begin{cases} PV^\gamma = const \\ P = \frac{c}{V^\gamma} \end{cases} \Longleftarrow$

$$-V\frac{\Delta P}{\Delta V} \longrightarrow -V\frac{\partial P}{\partial V}\Big|_S = \gamma\cdot P$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}}$$

ולכן:

שהתאים הרבה יותר לניסויים.