מכניקה קלאסית - תרגול 6

I מרכז מסה

נתבונן במערכת של N חלקיקים נקודתיים עם מסות $m_1, m_2, \dots, m_N$ (לחלקיק ה-i יש מסה m_i, $1 \le i \le N$).

נסמן את מיקום החלקיק ה-i ביחס לראשית הצירים (שנבחר, כמו תמיד, שרירותית לחלוטין), ע"י $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$

נגדיר את <u>וקטור מרכז המסה</u> ע"י

$$\boxed{\vec{R}_{cm} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i}}$$

כאשר הסכום הוא ע"פ <u>כל</u> החלקיקים $\sum \equiv \sum_{i=1}^{N}$

למעשה, הגדרנו <u>ממוצע משוקלל</u> של מיקומי המסות, כאשר המיקום של המסה ה-i, $\vec{r}_i$, נכנס לממוצע עם משקל m_i. קל יותר להבין את משמעות הממוצע הזה אם ניקח מקרה פרטי בו כל המסות שוות ל-m. במקרה כזה:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m} = \frac{m \cdot \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i}{N \cdot m} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i}{N}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{X_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}, \quad y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}, \quad Z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i}{N}}$$

ממוצע של הקורדינטות של החלקיקים.

באופן כללי, נסמן את המסה הכוללת של כל המערכת:

$$M_{tot} = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

ונקבל:

$$\boxed{\vec{R}_{cm}} = (X_{cm}, y_{cm}, Z_{cm}) = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M_{tot}} = \boxed{\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M_{tot}}, \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M_{tot}}, \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M_{tot}} \right)}$$

<u>למה הגדרה זו שימושית?</u> ניתן להגדיר את מהירות מרכז המסה להיות המהירות שבה זזה נקודת מרכז המסה במרחב:

$$\vec{V}_{cm} = \dot{\vec{R}}_{cm} = \frac{d}{dt}\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M_{tot}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i}{M_{tot}}$$

כלומר מהירות מרכז המסה היא הממוצע המשוקלל של מהירויות הגופים. באותה צורה, תאוצת מרכז המסה:

$$\vec{a}_{cm} = \dot{\vec{V}}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i}{M_{tot}}$$

כאשר מתבוננים בכל הכוחות שפועלים על מערכת הגופים, אז הכוחות הפנימיים מתבטלים (חוק III של ניוטון) ואנו נשארים עם הכוחות החיצוניים:

סה"כ על המערכת
$$\vec{F}_{ext} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ext,i} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = M_{tot} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i}{M_{tot}} = M_{tot}\vec{a}_{cm}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{F}^{(tot)}_{ext} = M_{tot} \cdot \vec{a}_{cm}}$$

מרכז המסה נע כמו גוף נקודתי במסה הכוללת של המערכת, שפועלים עליה סה"כ הכוחות החיצוניים שיש על המערכת.

~~אם המערכת היא סגורה~~

התנע הכולל של המערכת:

$$\vec{P}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i V_i$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{P}_{tot} = M_{tot} \cdot \vec{V}_{cm}}$$

אם המערכת היא סגורה, כלומר סך הכוחות החיצוניים על המערכת היא 0, אז: חוק שימור התנע קובע שהתנע הכולל של המערכת נשמר $\Leftarrow \vec{P}_{tot} = const \Leftarrow \boxed{\vec{V}_{cm} = const}$

כלומר ממוצע המהירויות של כל חלקיקי המערכת לא משתנה.

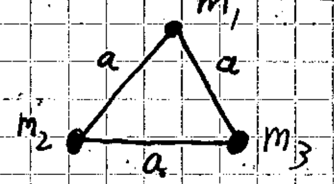
אם אנו עובדים במערכת שמהירותה שווה לאפס, אז נקבל: $\dot{\vec{R}}_{cm} = \vec{V}_{cm} = 0 \Leftarrow \boxed{\vec{R}_{cm} = const}$

זה נקרא נפלא!! זה אומר שאם שמים $N_A \cong 6\times10^{23}$
חלקיקים בקופסא, ונותנים להם להתנגש אחד בשני ובקירות
ולעשות מה שהם רוצים באופן כאוטי לגמרי, כל עוד הממוצע
של המהירות שלהם בתחילת התהליך היה אפס, אזי המיקום
הממוצע של כל החלקיקים בקופסא לא ישתנה לעולם!

דוגמאות:

I

נשים את ראשית הצירים במסה m_2. נקבע את מישור x-y להיות מישור המשולש.



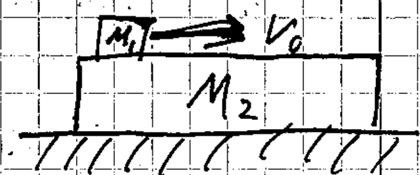
$$\vec{r}_1=\left(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}a}{2},0\right),\quad \vec{r}_2=(0,0,0),\quad \vec{r}_3=(a,0,0) \Longrightarrow$$

$$\boxed{X_{cm}}=\frac{m_1\cdot\frac{a}{2}+m_2\cdot 0+m_3\cdot a}{m_1+m_2+m_3}=\boxed{\frac{a}{2}\,\frac{m_1+2m_3}{m_1+m_2+m_3}}$$

$$\boxed{y_{cm}}=\frac{m_1\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2}+m_2\cdot 0+m_3\cdot 0}{m_1+m_2+m_3}=\boxed{\frac{\sqrt{3}a}{2}\,\frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}}$$

$$\boxed{Z_{cm}}=\frac{m_1\cdot 0+m_2\cdot 0+m_3\cdot 0}{m_1+m_2+m_3}\boxed{=0}$$

II שאלה 3 מת"ב 5: מסה M_1 מחליקה ע"ג מסה M_2 עם מקדם חיכוך μ ביניהן. בין M_2 לרצפה אין חיכוך. מהירותה ההתחלתית של M_1 היא V_0. מה המהירות הסופית המשותפת.



המערכת מבודדת מהסביבה, מהבחינה שאין על המערכת כוחות חיצוניים בציר $\hat{x}$.

לכן מהירות מרכז המסה בציר זה נשמרת:

$$V^{(i)}_{x,cm}=\frac{M_1\cdot V_0+M_2\cdot 0}{M_1+M_2}=\frac{M_1}{M_1+M_2}\cdot V_0$$

כמו שקיבלתם בתב"ה משיקולים של שימור תנע - למעשה הדברים שקולים.

$$V^{(f)}_{x,cm}=\frac{M_1\cdot u+M_2\cdot u}{M_1+M_2}=\frac{(M_1+M_2)u}{M_1+M_2}=\boxed{u}=V^{(i)}_{x,cm}=\boxed{\frac{M_1}{M_1+M_2}V_0}$$

III) כלב במסה $m=20_{kg}$ עומד על סירה במסה $M=80_{kg}$.
מרחק הכלב מהחוף הוא 600_{cm}, והוא הולך 200_{cm} על
הסירה (ביחס לסירה) לכיוון החוף. מהו מרחקו הסופי מהחוף?

$\Longleftarrow$ אין פה כוחות חיצוניים ולכן $V_{cm}=const$. אבל בהתחלה
$V_{cm}=0$ ולכן מרכז המסה לא משתנה בכל התהליך $X_{cm}=const$.

במילים אחרות, המרחק שזז מרכז המסה בזמן תנועת
הכלב: $\Delta X_{cm}=0$.

הכלב זז 200_{cm} ביחס לסירה, לכיוון החוף. כדי לשמור את
מרכז המסה, הסירה זזה מרחק X בכיוון ההפוך:

לכן, ביחס לחוף, הכלב זז מרחק $(200-x)$ לכיוון החוף.

$$0=\Delta X=\frac{m(200-x)+M(-x)}{m+M}$$
$$\Downarrow$$
$$x(M+m)=200\cdot m$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{X=}\ 200_{cm}\cdot\frac{m}{M+m}=200\cdot\frac{20}{100}\boxed{=40_{cm}}$$

$\Longleftarrow$ מרחק הכלב מהחוף בסוף הוא: $600-(200-40)\boxed{=440_{cm}}$

חישוב מרכז מסה של גוף רציף

רוב הגופים בעולם אינם מערכות של מסות נקודתיות, אלא
גופים רציפים עם צפיפות מסה: 3-d $\rho(x,y,z)$ (נפחית)

2-d $\sigma(x,y)$ (משטחית)

1-d $\lambda(x)$ (אורכית)

איך נחשב מרכז מסה?

המשמעות של צפיפות $\rho(x,y,z)$ היא שסביב כל נקודה $\vec{r}=(x,y,z)$ בתוך הגוף, המסה של אלמנט נפח קטן $dv=dxdydz$ סביב $\vec{r}$ היא: $dm=\rho(x,y,z)\cdot dv$. לכן, נוכל פשוט לחשב ישירות את מרכז המסה לפי הנוסחה של מסות בדידות ואז לעשות $dv \to 0$.

$$M_{tot}=\sum_{\vec{r}\in \text{גוף}} \rho(x,y,z)\,dxdydz \longrightarrow \underbrace{\iiint \rho\, dxdydz}_{\text{אינטגרל}}$$

$$\vec{R}_{cm}=\sum_{\vec{r}\in \text{גוף}} \vec{r}\cdot\rho(\vec{r})\,dv \longrightarrow \boxed{\iiint (x,y,z)\cdot\rho(x,y,z)\,dxdydz}$$

דוגמאות

(I) תיבה הומוגנית:

$$\rho(x,y,z)=\begin{cases}\rho_0 & \text{if } \begin{matrix}0\le x\le a\\ 0\le y\le b\\ 0\le z\le c\end{matrix}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

ניחוש: מרכז מסה ("ממוצע" של מיקומי המסות בתיבה) יהיה במרכז התיבה:

$$\boxed{M_{tot}}=\int_0^c\int_0^b\int_0^a \rho_0\,dxdydz=\boxed{\rho_0\cdot a\cdot b\cdot c}$$

$$\boxed{X_{cm}}=\frac{\int_0^c\int_0^b\int_0^a x\rho_0\cdot dxdydz}{M_{tot}}=\frac{\rho_0\cdot\frac{a^2}{2}\cdot b\cdot c}{\rho_0\cdot a\cdot b\cdot c}=\boxed{\frac{a}{2}}$$

באותה צורה בדיוק: $y_{cm} = \frac{b}{2}, \quad z_{cm} = \frac{c}{2}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{R}_{cm} = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)}$$

(2) פלטה עגולה עם צפיפות משטחית: $\sigma(r,\varphi) = \sigma_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2$

$$\Downarrow$$

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \sigma_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot r\,dr\,d\varphi = \frac{2\pi\sigma_0}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^2 \sigma_0}{2}$$

מה לגבי מרכז המסה? שימו לב שלא ניתן לכתוב ביטוי עבור r_{cm} או φ_{cm} לפי $\varphi_{cm} = \frac{\iiint \varphi \cdot \sigma \cdot r\,dr\,d\varphi}{M}$

זה לא יעבוד!

צריכים לחשב X_{cm}, Y_{cm}:

$$X_{cm} = \frac{\iint x \cdot \sigma \cdot dx\,dy}{M} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{R} (r\cos\varphi) \cdot \left(\sigma_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \cdot r\,dr\,d\varphi}{M} =$$

$$= \frac{\sigma_0/R^2}{M} \cdot \int_0^{R} r^4\,dr \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi\,d\varphi}_{0} = 0$$

כמו כן: $y = r\sin\varphi \Leftarrow$

$$Y_{cm} = \frac{\sigma_0/R^2}{M} \int_0^{R} r^4\,dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\varphi\,d\varphi}_{0} = 0$$

מכיוון שצפיפות העיגול היא רדיאלית, היא סימטרית ביחס למרכז. לכל אלמנט מסה במרחק r ובזווית φ, יש אלמנט מסה זהה במרחק r וזווית $(\varphi+\pi)$ ולכן הממוצע הוא במרכז.

③ שוב, עיגול ברדיוס R, אך הפעם: $\sigma(r,\varphi)=\sigma_0\left(\frac{r}{R}\right)^2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

נשים לב שיש רציפות זוויתית, במובן ש: $\sigma(r,0)=\sigma(r,2\pi)$.

$$\boxed{M}=\int_0^{2\pi}\int_0^R\sigma_0\left(\frac{r}{R}\right)^2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cdot r\,dr\,d\varphi=\frac{\sigma_0}{R^2}\cdot\frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi=\frac{\sigma_0R^2}{4}\cdot\left.\frac{-\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{\sigma_0R^2}{2}\cdot\left(-\cos(\pi)+\cos(0)\right)=\frac{\sigma_0R^2}{2}\cdot2=\boxed{\sigma_0R^2}$$

$$X_{cm}=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^R(r\cos\varphi)\cdot\sigma_0\left(\frac{r}{R}\right)^2\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cdot r\,dr\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{M}\cdot\frac{\sigma_0}{R^2}\int_0^R r^4dr\int_0^{2\pi}\cos(\varphi)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi=\frac{1}{M}\cdot\frac{\sigma_0}{R^2}\cdot\frac{R^5}{5}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi$$

$$=\frac{\sigma_0R^3}{10M}\left[-\frac{2}{3}\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right)+2\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^{2\pi}=\frac{\sigma_0R^3}{10\sigma_0R^2}\left[-\frac{2}{3}\cos(3\pi)+2\cos(\pi)-\left(-\frac{2}{3}+2\right)\right]$$

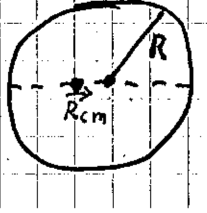
$$=\frac{R}{10}\left[\frac{2}{3}-2+\frac{2}{3}-2\right]=\frac{R}{10}\cdot\frac{-8}{3}=\boxed{-\frac{4}{15}R=X_{cm}}$$

$$y_{cm}=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^R(r\sin\varphi)\cdot\sigma_0\left(\frac{r}{R}\right)^2\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cdot r\,dr\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{M}\cdot\frac{\sigma_0}{R^2}\cdot\frac{R^5}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}2\sin(\varphi)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{\sigma_0R^3}{10\sigma_0R^2}\cdot\int_0^{2\pi}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right]d\varphi=$$

$$=\frac{R}{10}\cdot\left[2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{2}{3}\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right]_0^{2\pi}=\boxed{0=y_{cm}}$$

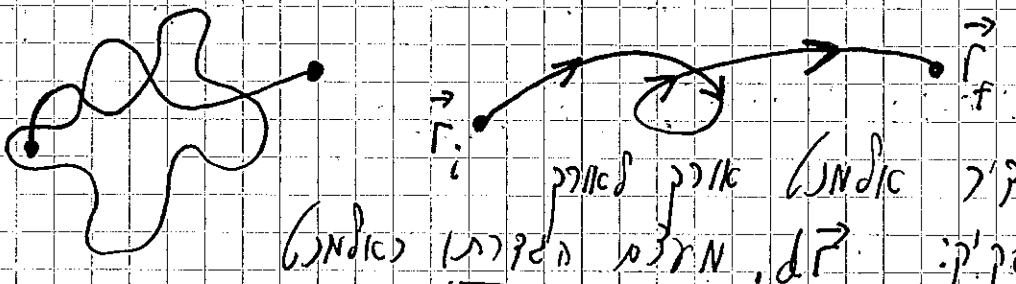


II אנרגיה קינטית

חוק II של ניוטון עבור מסה קבועה: $\vec{F} = m\cdot\vec{a} = m\dot{\vec{v}}$

החלקיק נע לאורך מסלול שמוגדר ע"י וקטור מיקום $\vec{r}(t)$

ביחס לראשית, עם וקטור מהירות $\vec{v}(t)$.



ניתן להגדיר אלמנט אורך לאורך

מסלול החלקיק: $d\vec{r}$, מעצם הגדרתו כאלמנט

אורך לאורך המסלול, $\boxed{d\vec{r} \parallel \vec{v}}$

נבצע אינטגרציה של הכוח לאורך המסלול.

$$\boxed{W \equiv} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} m\dot{\vec{v}}\cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m\dot{\vec{v}}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt = \int_{t_i}^{t_f} m\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v}\,dt =$$

מכפלה סקלרית.
כלומר אם $\vec{F} \perp d\vec{r}$
כלומר כוח ניצב למסלול,
זה מתאפס.

שינוי משתנה
אינטגרציה.

$$= \int_{t_i}^{t_f}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{(t_f)} - \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{(t_i)} \boxed{\equiv E_k^f - E_k^i}$$

$\Leftarrow$ W מוגדרת להיות העבודה של הכוח לאורך המסלול

E_k " האנרגיה הקינטית של הגוף.

קיבלנו שהעבודה של כוח לאורך המסלול שווה להפרש של

האנרגיה הקינטית בקצוות המסלול.

אם אין עבודה (או שאין כוח, או שהכוח ניצב למסלול)

אז האנרגיה הקינטית נשמרת.

התנגשויות:

(1) אלסטית לחלוטין: יש שימור תנע + שימור אנרגיה קינטית במהלך ההתנגשות. הגופים לא נדבקים.

(2) פלסטית לחלוטין: יש שימור תנע במהלך ההתנגשות
- אין שימור אנרגיה.
- הגופים נדבקים ונעים ביחד לאחר ההתנגשות.

(3) אי-אלסטית:
- יש שימור תנע.
- אין שימור אנרגיה
- הגופים לא נדבקים

הכי קשה!

למה בהתנגשות פלסטית תמיד יש אובדן אנרגיה?

$\Longleftarrow$ נניח התנגשות בין 2 גופים. וקטורי המהירות ההתחלתיות מגדירים מישור. נבחר את מישור XY להתלכד עם המישור של התנועה, ואת ציר $\hat{x}$ להתלכד עם כיוון התנועה של m_1.

יודעים שמהירות מרכז המסה לא משתנה במהלך ההתנגשות.

$$\boxed{\frac{m_1\vec{V}_1+m_2\vec{V}_2}{m_1+m_2}} = \vec{V}_{cm}^{(i)} = \vec{V}_{cm}^{(f)} = \frac{m_1\vec{u}+m_2\vec{u}}{m_1+m_2} = \boxed{\vec{u}}$$

$$E_k^{(i)} = \frac{m_1V_1^2}{2}+\frac{m_2V_2^2}{2}$$

$$E_k^{(f)} = \frac{m_1+m_2}{2}u^2 = \frac{m_1+m_2}{2}\cdot\frac{m_1^2V_1^2 + 2m_1m_2\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2 + m_2^2V_2^2}{(m_1+m_2)^2} =$$

$$= \frac{m_1V_1^2}{2}\cdot\frac{m_1}{m_1+m_2} + \frac{m_2V_2^2}{2}\cdot\frac{m_2}{m_1+m_2} + \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\cdot\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2 .$$

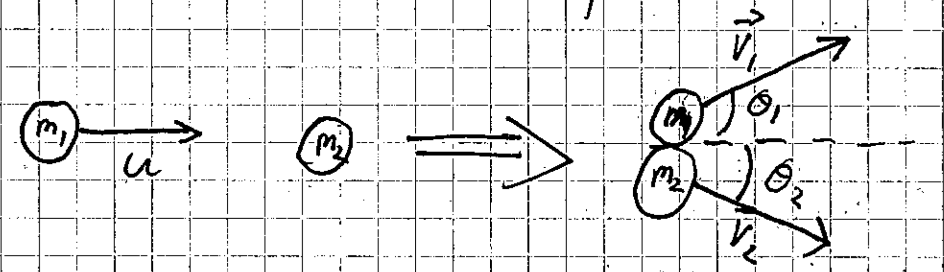
$$\boxed{E_k^{(i)} - E_k^{(f)}} = \frac{m_1V_1^2}{2}\left(1-\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) + \frac{m_2V_2^2}{2}\left(1-\frac{m_2}{m_1+m_2}\right) - \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2$$

$$= \frac{m_1V_1^2}{2}\cdot\frac{m_2}{m_1+m_2} + \frac{m_2V_2^2}{2}\cdot\frac{m_1}{m_1+m_2} - \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2 =$$

$$= \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}\left(V_1^2 - 2\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2 + V_2^2\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(\vec{V}_1-\vec{V}_2\right)^2 \boxed{>0}$$

דוגמא: התנגשות אלסטית בדו מימד

2 מסות m_1, m_2. m_2 במנוחה ו- m_1 נע לעברה במהירות u. לאחר ההתנגשות, m_2 מתפזרת בזווית θ_2 ביחס לכיוון תנועתה המקורי של m_1. מהי זווית הפיזור של m_1 ביחס לאותו כיוון אם ההתנגשות היא אלסטית?



שימור תנע בציר $\hat{x}$:

$$m_1u = m_2V_2\cos\theta_2 + m_1V_1\cos\theta_1$$

שימור תנע בציר $\hat{y}$:

$$0 = m_1V_1\sin\theta_1 - m_2V_2\sin\theta_2$$

$$\boxed{V_1\sin\theta_1 = \frac{m_2}{m_1}V_2\sin\theta_2}, \quad \boxed{V_1\cos\theta_1 = u - \frac{m_2}{m_1}V_2\cos\theta_2}$$

$$\boxed{tg\,\theta_1 = \frac{\frac{m_2}{m_1}V_2\sin\theta_2}{u-\frac{m_2}{m_1}V_2\cos\theta_2}} \qquad \boxed{V_1^2 = u^2 - \frac{2m_2}{m_1}u\cdot V_2\cos\theta_2 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2V_2^2}$$

$$\frac{1}{2}m_1 u^2 = \frac{1}{2}m_1 V_1^2 + \frac{1}{2}m_2 V_2^2 =$$

<u>שימור אנרגיה:</u>

$$= \frac{1}{2}m_2 V_2^2 + \frac{1}{2}m_1\left(\cancel{u^2} - \frac{2m_2}{m_1}uV_2\cos\theta_2 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 V_2^2\right) = \cancel{\frac{1}{2}m_1 u^2}$$

$$\Downarrow$$

$$0 = \frac{1}{2}m_2 V_2^2 + \frac{1}{2}m_2\cdot\frac{m_2}{m_1}V_2^2 - m_2 u V_2\cos\theta_2$$

$$\Downarrow$$

$$V_2^2\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) - 2u\cos\theta_2\cdot V_2 = 0$$

$$V_2\cdot\left[\frac{m_1+m_2}{m_1}\cdot V_2 - 2u\cos\theta_2\right] = 0$$

$$\boxed{V_2 = 2u\cos\theta_2\cdot\frac{m_1}{m_1+m_2}}$$

$$\Downarrow$$

$$tg(\theta_1) = \frac{\frac{m_2}{m_1}\sin\theta_2\cdot 2u\cos\theta_2\cdot\frac{m_1}{m_1+m_2}}{u - \frac{m_2}{m_1}\cos\theta_2\cdot 2u\cos\theta_2\cdot\frac{m_1}{m_1+m_2}} =$$

$$= \frac{\frac{m_2}{m_1+m_2}\cdot u\cdot\sin(2\theta_2)}{u\left[1-\frac{m_2}{m_1+m_2}\underbrace{2\cos^2(\theta_2)}_{1+\cos(2\theta_2)}\right]} = \boxed{\frac{\frac{m_2}{m_1+m_2}\cdot\sin(2\theta_2)}{1-\frac{m_2}{m_1+m_2}\left(1+\cos(2\theta_2)\right)} = tg\theta_1}$$

<u>עבור $m_1 = m_2$:</u>

$$\boxed{tg(\theta_1) =} \frac{\frac{1}{2}\cdot\sin(2\theta_2)}{1-\frac{1}{2}\left(1+\cos(2\theta_2)\right)} = \frac{\sin(2\theta_2)}{1-\cos(2\theta_2)} =$$

$$= \frac{2\sin(\theta_2)\cos(\theta_2)}{2\sin^2(\theta_2)} = \frac{\cos(\theta_2)}{\sin(\theta_2)} \boxed{= ctg(\theta_2)}$$

$$\boxed{\theta_1+\theta_2 = 90^\circ} \Longleftarrow x+y = \frac{\pi}{2}+\pi K \Longleftrightarrow tg(x) = ctg(y)$$

(נוצרת זווית ישרה בין
המסות)

$$tg(x) = ctg(y) \Longrightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos(y)}{\sin(y)}$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{\cos(x-y)} - \cos(x+y) = \sin(x)\sin(y) = \cos(x)\cos(y) = \cancel{\cos(x-y)} + \cos(x+y)$$

$$\Downarrow$$

$$-\cos(x+y) = \cos(x+y)$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(x+y) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x+y = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k}$$