# מכניקה קלאסית - תרגול 7

## I נגזרות כיווניות וגרדיינט

עבור פונקציה מרחבית $f(x,y,z)$ הגדרנו את 3 הנגזרות החלקיות:

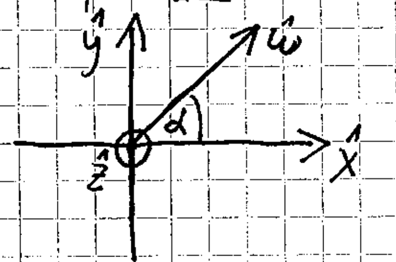
$\frac{\partial f}{\partial x}$ - משנים את $x$ ונשאיר $y,z$ קבועים

$\frac{\partial f}{\partial y}$ - " " $y$ " $x,z$ "

$\frac{\partial f}{\partial z}$ - " " $z$ " $x,y$ "

כעת נרצה להבין איך $f$ משתנה כאשר אנו צועדים לאורך מסלול שהוא לא רק בכיוון $\hat{x}$ או $\hat{y}$ או $\hat{z}$.

<u>למשל:</u>




הוקטור $\hat{w}$ מצביע לכיוון
$\hat{w} = \cos(\alpha)\hat{x} + \sin(\alpha)\hat{y}$.

כאשר צועדים בכיוון $\hat{w}$, איך משתנה $f$?

כאשר צועדים בכיוון $\hat{w}$, צועדים קצת בכיוון $\hat{x}$ וקצת בכיוון $\hat{y}$.

צעד אלמנטרי לאורך כיוון $\hat{w}$: $dw = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

$$dx = dw \cdot \cos(\alpha); \quad dy = dw \cdot \sin(\alpha)$$

הנגזרת הכיוונית של $f$ בכיוון $\hat{w}$:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial w}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial w} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}\sin(\alpha)}$$

~~באופן כללי, אם נתון מסלול של חלקיק כתלות בזמן: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ אנו יכולים לגזור פונקציה $f$ לאורך המסלול הנ"ל.~~

באופן כללי, הנגזרת של $f$ בכיוון $\hat{n} = n_x\hat{x} + n_y\hat{y} + n_z\hat{z}$

(כאשר $\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1$) היא: $\frac{\partial f}{\partial n} = n_x\frac{\partial f}{\partial x} + n_y\frac{\partial f}{\partial y} + n_z\frac{\partial f}{\partial z}$

(כאשר צעד אלמנטרי אורך בכיוון $\hat{n}$ הוא: $dn = n_x dx + n_y dy + n_z dz$)

נגדיר וקטור גרדיינט f: $\vec{\nabla}\cdot f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (\text{grad} f)$

זהו וקטור הנגזרות החלקיות של f.

אם נגדיר אופרטור דיפרנציאלי: $Nabla \equiv \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

אזי

$$\text{grad } f = \vec{\nabla}\cdot f$$

ונקבל:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial n} = (\vec{\nabla}\cdot f)\cdot \hat{n}}$$

בפרט:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (\vec{\nabla}\cdot f)\cdot \hat{x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

וכנ"ל עבור $\hat{y}, \hat{z}$.

משמעות גיאומטרית: הכיוון $\hat{n}_{max}$ שבו השינוי של f מקסימלי (המסלול התלול ביותר לפסגת ההר) מתקבל כש:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial n_{max}}\right| = \left|(\vec{\nabla}\cdot f)\cdot \hat{n}_{max}\right| = |\vec{\nabla}\cdot f|\cdot|\hat{n}_{max}|\cdot\cos\theta = |\vec{\nabla}\cdot f|\cdot\cos\theta$$

זה מקסימלי כאשר $\theta=0$, כלומר כאשר $\boxed{\hat{n}_{max} \parallel \vec{\nabla} f}$

$$\Leftarrow \quad \boxed{\hat{n}_{max} = \frac{\vec{\nabla}\cdot f}{|\vec{\nabla}\cdot f|}}$$

**הגרדיינט של פונקציה מצביע על כיוון השינוי המקסימלי של הפונקציה.**

דוגמא: $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ - פרבולואיד.

$$\Leftarrow \quad \vec{\nabla} f = (2x, 2y, 2z)$$

• כיוון שינוי מקסימלי בנקודה $(x,y,z)=(1,1,1)$

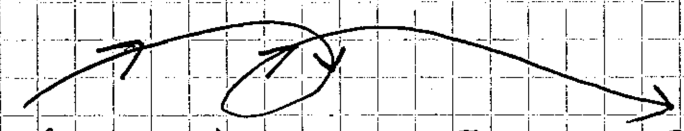
$$\frac{\vec{\nabla} f|_{(1,1,1)}}{|\vec{\nabla} f|_{(1,1,1)}|} = \frac{(2,2,2)}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

ובנקודה $(x,y,z)=(0,0,0)$:

$$\vec{\nabla} f|_{(0,0,0)} = 0 \Longrightarrow$$

הנקודה היא נקודת מינימום של הפונקציה, לכן אין כיוון שינוי מקסימלי, כל הכיוונים שקולים.

## נגזרת מסלולית



נניח מסלול $\vec{r}$

שתלוי בפרמטר $t$ (למשל מסלול של חלקיק כתלות בזמן).

$\vec{r}_{(t)} = (x_{(t)}, y_{(t)}, z_{(t)})$. אלמנט אורך בכיוון המסלול (לאורך המסלול):

$$d\vec{r} = dx_{(t)}\hat{x} + dy_{(t)}\hat{y} + dz_{(t)}\hat{z}$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}dt = \dot{\vec{r}}\,dt = \vec{V}dt = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)dt = (V_x, V_y, V_z)dt$$

אם יש פונק' $f(x,y,z)$ אזי הנגזרת המסלולית של $f$ לאורך המסלול $\vec{r}$ נתון ע"י:

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = (\vec{\nabla} f)\cdot\vec{V}}$$

(אם בנוסף, $f$ תלוי מפורשות בזמן $t$, נקבל:

$f(x,y,z,t)$

$\Downarrow$

$$\left(\boxed{\frac{df}{dt} = (\vec{\nabla} f)\cdot\vec{V} + \frac{\partial f}{\partial t}}\right)$$

## אינטגרלים מסלוליים

נניח שיש מסלול $\vec{r}_{(t)} = (x_{(t)}, y_{(t)}, z_{(t)})$, בין נקודות התחלה וסיום

$\vec{r}_{(t_i)} = \vec{r}_i$ , $\vec{r}_{(t_f)} = \vec{r}_f$.

- האינטגרל המסלולי של פונקצ'יה $f = f(x,y,z) = f(x_{(t)}, y_{(t)}, z_{(t)}) = f_{(t)}$

$$\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} f_{(\vec{r})}\,d\vec{r} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} f(dx, dy, dz) = \int_{x_i}^{x_f} f\,dx + \int_{y_i}^{y_f} f\,dy + \int_{z_i}^{z_f} f\,dz$$

$$\| $$

$$\int_{t_i}^{t_f} f_{(t)}\frac{d\vec{r}}{dt}dt = \int_{t_i}^{t_f} (f_{(t)}\vec{V})dt$$

- אם הפונקציה היא וקטורית, $\vec{F}(x,y,z)$, אזי נקבל:

$$\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y\,dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z\,dz = \int_{t_i}^{t_f} (\vec{F}\cdot\vec{V})dt$$

## II עבודה, כוחות משמרים ואנרגיה פוטנציאלית

עבור כוח $\vec{F}$ שפועל על חלקיק לאורך מסלול $\vec{r}(t)$
בין נקודה $\vec{r}_i$ לנקודה $\vec{r}_f$, הגדרנו את העבודה שמבצע הכוח על החלקיק לאורך המסלול להיות:

$$W_{[\vec{r}_i,\vec{r}_f]} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r} \underset{\text{פעם קודמת}}{=} E_k^{(f)} - E_k^{(i)} \equiv \Delta E_k$$

כאשר $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ היא האנרגיה הקינטית של הגוף

הגדרנו כוח להיות <u>כוח משמר</u>, אם העבודה שהוא מבצע לאורך מסלול, <u>לא תלוי</u> במסלול המדויק, אלא רק בנקודות הקצה.

במילים אחרות, אם נקודות הקצה <u>זהות</u>, כלומר המסלול הוא סגור, אז העבודה היא 0, כי המסלול יהיה שקול ללא לזוז בכלל.

<u>דוגמאות:</u> I זורקים כדור כלפי מעלה במהירות התחלתית $v$ הכדור מגיע לגובה מקסימלי $h$, ואז יורד למטה שוב.

$$W_{up} = \int_{(0,0,0)}^{(0,0,h)} (-mg\hat{z})\cdot d\vec{r} = \int_0^h -mg\,dz = -mgh$$

$$W_{down} = \int_{(0,0,h)}^{(0,0,0)} (-mg\hat{z})\cdot d\vec{r} = \int_h^0 -mg\,dz = mgh$$

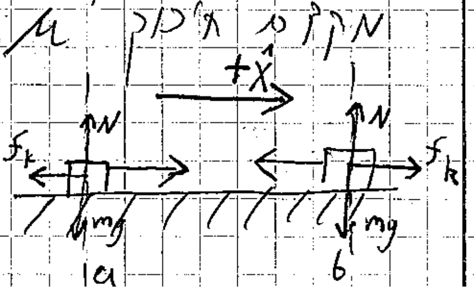
$$\boxed{W_{tot} = W_{up} + W_{down} = 0}$$

העבודה לאורך מסלול סגור התאפסה. בהמשך נראה ש $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$ אכן כוח משמר.

II גוף מחליק מנקודה $a$ לנקודה $b$ ובחזרה על משטח עם מקדם חיכוך $\mu$.

$$W_{a\to b} = \int_a^b -\mu mg\,dx = -\mu mg(b-a)$$

$$W_{b\to a} = \int_b^a +\mu mg\,dx = \mu mg(a-b)$$



כאשר הכח החליף סימן (פועל ימינה במקום שמאלה)

$$W_{a\to b\to a} = -2\mu mg(b-a) < 0 \quad \Longleftarrow$$

$\Longleftarrow$ לכן איננו כח משמר.

ראינו בכיתה שתנאי שקול לכך שכח הוא כח משמר הוא:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \text{וגם} \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad \text{וגם} \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

תנאי שקול לכך, הוא לומר שקיימת פונקציה סקלרית $U(x,y,z)$ כך ש: $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ (סימן − הוא מוסכמה נוחה שמקורה יתברר בהמשך).

במקרה כזה: $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$, $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$, $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$

ושלושת השוויונות לעיל מתקבלים משוויון נגזרות חלקיות מעורבות של $U$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(-F_y) = \boxed{-\frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial F_x}{\partial y}} = \frac{\partial}{\partial y}(-F_x)$$

במקרה כזה, ל- $U$ קוראים האנרגיה הפוטנציאלית של הכח $\vec{F}$.

דוגמא: (I) $\vec{F} = -mg\hat{z} \Longrightarrow U(z) = mg(z-z_0)$

כאשר $z_0$ נקודת ייחוס שרירותית.

$\Downarrow$

רואים ש- $U$ מוגדר עד כדי קבוע. למעשה אין משמעות פיזיקלית לאנרגיה הפוטנציאלית בנקודה מסויימת, אלא רק להפרש האנרגיות בין 2 נקודות שונות, שאז הקבוע "נעלם".

העבודה שמבצע כוח משמר:

$$W=\int_{\vec r_i}^{\vec r_f}\vec F\cdot d\vec r=-\int_{t_i}^{t_f}\vec\nabla u\cdot\frac{d\vec r}{dt}dt=-\int_{t_i}^{t_f}\underbrace{\left[(\vec\nabla u)\cdot\vec v\right]}dt=$$

$$=-\int_{t_i}^{t_f}\frac{du}{dt}dt=-\left[u(\vec r_{(t_f)})-u(\vec r_{(t_i)})\right]$$

$u(x,y,z)=u(x_{(t)},y_{(t)},z_{(t)})$

$\frac{du}{dt}=(\vec\nabla\cdot u)\cdot\vec v$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{W=-\Delta u}$$

העבודה היא מינוס הפרש האנרגיה הפוטנציאלית בין הסוף להתחלה.

<u>מצב שני:</u>

$$-\Delta u=W=\Delta E_K$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta(E_k+u)=\Delta(E_{mech})=0}$$

אם יש רק כוחות משמרים, אז הסכום של אנרגיה קינטית ועוד אנרגיה פוטנציאלית <u>נשמר בזמן</u>.

במקרה הכללי, $\vec F=\vec F_{cons}+\vec F_{N.C.}$ כאשר

$\vec F_{cons}=-\vec\nabla u$ ואילו $\vec F_{N.C.}$ מייצג כוחות לא משמרים.

נקבל: $\Delta E_K=W_{tot}=W_c+W_{N.C.}=-\Delta u+W_{N.C.}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{W_{N.C.}}=\int_{\vec r_i}^{\vec r_f}\vec F_{N.C.}d\vec r=\boxed{\Delta(E_k+u)=\Delta(E_{mech})}$$

שינויים במאזן האנרגיה הכללי נגרמים ע"י כוחות לא משמרים.

פתרונות (I) זורקים גוף כלפי מעלה במהירות $V_0$, לאיזה גובה יגיע?

$\Leftarrow$ יש כאן רק כוחות משמרים: $\vec{F} = -mg\hat{z} \Rightarrow U = mg(z-z_0)$

נקבע $z_0$ בגובה הקרקע, ואז $h=(z-z_0)$ זה גובה הגוף.

יש שימור אנרגיה כוללת, לכן: $\frac{1}{2}mV^2 + mgh = const$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{בהתחלה,} & V=V_0,\ h=0 \\ \text{בשיא הגובה} & V=0,\ h=H \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}mV_0^2 = mgH$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{H = \frac{V_0^2}{2g}}$$

(II) משחררים גוף מגובה $H$, באיזה מהירות יפגע בקרקע?

$\Leftarrow$ שוב, יש רק כוחות משמרים ולכן $E_{tot} = const$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}mV_f^2 = mgH \Rightarrow \boxed{V_f = \sqrt{2gH}}$$

(III) קבע האם הכוח הבא (כן) משמר: $\vec{F}(\vec{r}) = (2xy+1, x^2)$

$F_x(\vec{r}) = 2xy+1,\quad F_y(\vec{r}) = x^2$

אם $\vec{F}$ משמר, אז קיים $U$ כך ש: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U \Rightarrow \begin{cases} F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \end{cases}$

$$\Downarrow$$

מצד אחד

(I) $U = -\int F_x dx = -\int (2xy+1)dx = -(x^2y + x + g(y))$

כאן קבוע אינטגרציה, אבל תלוי ב-$y$, כי גזרנו חלקית לפי $x$. $\frac{\partial g(y)}{\partial x} = 0$

מצד שני:

(II) $U = -\int F_y dy = -\int x^2 dy = -x^2y + h(x)$

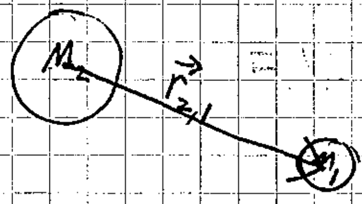
$\Leftarrow$ נבחר $h(x) = x$, $g(y) = const$ ונקבל אנרגיה פוטנציאלית

$$\boxed{U = -(x^2y + x) + C} \longleftarrow \text{הכוח משמר!}$$

## עוד דוגמאות לכוחות משמרים:

(1) גרביטציה בין 2 גופים $M_1, M_2$. הכוח שפועל על $M_1$ בגלל $M_2$:

$$\vec F_1 = -\frac{G M_1 M_2}{r_{2,1}^2}\hat r_{2,1}$$




$$\Downarrow$$

$$\boxed{U = -\frac{G M_1 M_2}{r_{2,1}}} \longrightarrow$$ אנרגיה פוטנציאלית של $M_1$ בגלל המשיכה ל- $M_2$.

(2) <u>כוח של קפיץ:</u> נדון על זה עוד בהמשך, אבל בינתיים:

$\vec F = -kx\hat x \Rightarrow$ בעיה חד מימדית: $F = -kx$

$$\Downarrow$$

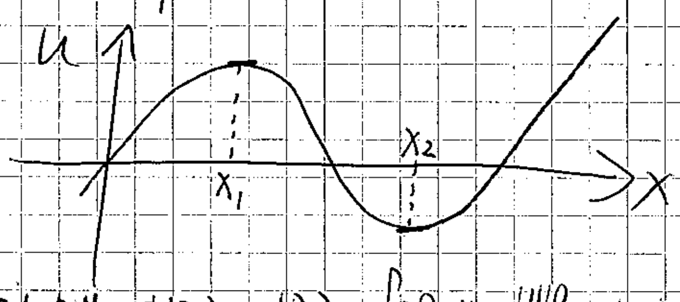
$$\boxed{U = \frac{1}{2}kx^2}$$

<u>נקודות שיווי משקל:</u>

גוף נמצא בשיווי משקל, כאשר סכום הכוחות הפועלים עליו מתאפס. $\vec F = 0$.

נניח כוח חד-מימדי משמר: $F = -\frac{dU}{dx}$

אזי $F=0 \Leftrightarrow U$ במינימום/מקסימום.




$x_1, x_2$ נקודות שיווי משקל, בהן הכוח מתאפס.

נניח אנחנו ליד $x_2$, בנקודה $x = x_2 \pm dx$.

- מימין ל $x_2$, בנקודה $x_2+dx$, $\frac{dU}{dx} > 0 \Rightarrow F = -\frac{dU}{dx} < 0 \Rightarrow$ הכוח מושך את החלקיק חזרה שמאלה לכיוון $x_2$.
- משמאל ל $x_2$, בנק' $x_2-dx$, $\frac{dU}{dx} < 0 \Rightarrow F = -\frac{dU}{dx} > 0 \Rightarrow$ הכוח מושך את החלקיק חזרה ימינה לכיוון $x_2$.

$\Leftarrow$ כאשר $U$ במינימום, שיווי המשקל הוא יציב, והכוח מחזיר

של הנקודה.

לדוגמא נניח, בנקודה $x_1+dx$ , $F=-\frac{du}{dx}>0 \Leftarrow \frac{du}{dx}<0$

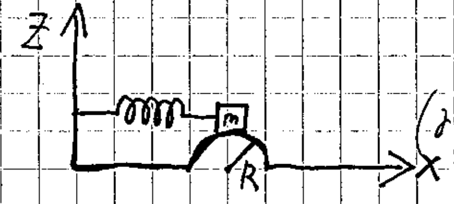
והכוח רק ירחיק את החלקיק עוד יותר מ-$x_1$.

כנ"ל עבור $x_1-dx$

$\Longleftarrow$ כאשר $U(x)$ מקסימום, שיווי המשקל לא יציב, וכל הפרעה קטנה יגרום לחלקיק להרחק מהנקודה ולא לחזור.

## תרגיל:

(נקבע $z_0$ בגובה הקרקע)




מסה מחוברת לקפיץ ונעה על גבי גבעה מעגלית ברדיוס $R$. מהן נקודות שיווי המשקל?

האנרגיה הפוטנציאלית כאן היא של הקפיץ + הגרביטציה. אין כאן כוחות נוספים, לכן סה"כ הכוח נגזר מאנרגיה זו:

$$U=U(x)=\frac{1}{2}kx^2+mgZ(x)=\frac{1}{2}kx^2+mg\sqrt{R^2-x^2}$$

נקודות ש"מ:

$$F_x=-\frac{du}{dx}=-kx+\frac{mgx}{\sqrt{R^2-x^2}}=0$$

$$\Downarrow$$

$$mgx-k\sqrt{R^2-x^2}\cdot x=0$$

$$\Downarrow$$

$$\text{I}\ \boxed{x=0} \qquad \text{II}\ \sqrt{R^2-x^2}=\frac{mg}{k}$$

$$\boxed{x=\pm\sqrt{R^2-\left(\frac{mg}{k}\right)^2}}$$

מה יציב ומה לא?

$$U''(x)=k-\frac{mg}{\sqrt{R^2-x^2}}-\frac{mgx^2}{(R^2-x^2)^{3/2}}$$

$$U''(0)=k-\frac{mg}{R}$$

$$U''\left(\pm\sqrt{R^2-\left(\frac{mg}{k}\right)^2}\right)=\cancel{k}-\cancel{\frac{mg}{mg/k}}-\frac{mg}{\left(\frac{mg}{k}\right)^3}\cdot\left(R^2-\left(\frac{mg}{k}\right)^2\right)=\frac{k^3}{(mg)^2}\left[\left(\frac{mg}{k}\right)^2-R^2\right]$$

אם $R>\frac{mg}{k}$, אז: $\frac{mg}{R}<k \Leftarrow$ $\boxed{U''(0)=k-\frac{mg}{R}>0}$

נקודה יציבה.

אבל אם $R < \frac{mg}{k}$: $U''(0) < 0$ $\Leftarrow$ הנקודה יציבה והקפיץ ימתח.

אם $R > \frac{mg}{k}$: $\Leftarrow$ $\left(\frac{mg}{k}\right)^2 - R^2 < 0$ $\Leftarrow$ $U''\left(\pm\sqrt{R^2 - \left(\frac{mg}{k}\right)^2}\right) < 0$

והנקודות הן יציבות.

אם $R < \frac{mg}{k}$: נקודות ש"מ בקצוות אינן יציבות.

דוגמא ב: מסה $m$ סובבת תנועה מעגלית (ברדיוס $R$) סביב מסה $M$ בהשפעת הגרביטציה. מה האנרגיה הכוללת של הגוף?

$$E = E_k + U$$

$$U = -\frac{GmM}{R}, \quad E_k = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m \cdot \frac{GM}{R} = \frac{1}{2}\frac{GmM}{R} = -\frac{1}{2}U$$

(ראינו פעם)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E_{tot}} = \frac{1}{2}\frac{GmM}{R} - \frac{GmM}{R} = \boxed{-\frac{1}{2}\frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}U = -E_k}$$

כמה אנרגיה דרושה לשנות מסלול של לוין מרדיוס $R_1$ לרדיוס $\overset{2R_1}{\overset{\shortparallel}{R_2}}$?

מסת הלוין $m$, מסת כדוה"א $M_E$.

$$\boxed{\Delta E} = -\frac{1}{2}GmM_E\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = -\frac{1}{2}GmM_E\left(\frac{1}{2R_1} - \frac{1}{R_1}\right) = \boxed{\frac{GmM_E}{4R_1}}$$

וכדי לשגר את הלוין מפני כדוה"א ל- $R_1$:

$$\Delta E = \left(-\frac{1}{2}\frac{GmM_E}{R_1}\right) - \left(-\frac{GmM_E}{R_E}\right) = GmM_E\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{2R_1}\right)$$

אם $R_1 = 2R_E$, נקבל:

$$\Delta E = \frac{3GmM_E}{4R_E} = \frac{3GmM_E}{2R_1}$$