משוואות פרידמן מיחסות כללית

ראינו את מטריקת רוברטסון-ווקר ליקום הומוגני ואיזוטרופי

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[du^2 + S_k^2(u)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right]$$

כאשר אנחנו עובדים ביחידות שבהן $c = 1$.

הפונקציה $S_k(u)$ יכולה לקבל את אחת משלוש צורות אפשריות:

$$S_k(u) = \begin{cases} \sin(u) & k=+1 \\ \sinh(u) & k=-1 \\ u & k=0 \end{cases}$$

$k=+1$: יקום סגור ⟵ עקמומיות חיובית

$k=-1$: " פתוח ⟵ " שלילית

$k=0$: יקום שטוח ⟵ עקמומיות 0

שימו לב שבכל מקרה מתקיים: $S''_k(u) = -k\,S_k(u)$

ובכתיב הזה, ל-k יש יחידות של אחד חלקי אורך בריבוע ($\frac{1}{u^2}$), כלומר k מייצג את העקמומיות (המנורמלת) של

היקום: $k=+1$ אומר עקמומיות חיובית קבועה

$k=-1$ " " שלילית "

$k=0$ " " אפס "

נעבוד במוסכמה של סימן המטריקה $(-,+,+,+)$ שזה שקול לחישוב רכיבי המטריקה מאלמנט הזמן העצמי $d\tau^2$ במקום מאלמנט האורך ds^2, כאשר מתקיים $d\tau^2 = -ds^2$.

אם כן:

$$\boxed{\begin{aligned} g_{tt} &= -1 \\ g_{uu} &= a^2(t) \\ g_{\theta\theta} &= a^2(t)\,S_k^2(u) \\ g_{\varphi\varphi} &= a^2(t)\,S_k^2(u)\sin^2(\theta) \end{aligned}}$$

תחת מוסכמה זו (ועוד מוסכמה לגבי סימן של טנזור רימן שאציג בהמשך) משוואת איינשטיין היא:

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

$T_{\mu\nu}$ זהו טנזור התנע-אנרגיה ויש לו עבור "נוזל אידיאלי" (של חומר או קרינה) את הצורה הכללית

$$T_{\mu\nu} = (P+\rho)U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}$$

כאשר U^μ זה וקטור 4 המהירות של החומר. אנחנו עובדים במערכת המנוחה של החומר, ולכן $U^\mu = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

ולכן $U_\mu = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

$$\boxed{\begin{aligned} T_{tt} &= P+\rho-P = \rho \\ T_{uu} &= a^2_{(t)}\cdot P \\ T_{\theta\theta} &= a^2_{(t)}\cdot S_k^2(u)\cdot P \\ T_{\varphi\varphi} &= a^2_{(t)} S_k^2(u)\sin^2(\theta)\cdot P \end{aligned}}$$

לכן, קיבלנו:

$$\boxed{T_{\mu\nu} = 0 \quad if \quad \mu\neq\nu}$$

(שימו לב ש- ρ זו צפיפות אנרגיה ולא רק צפיפות מסה)

טנזור איינשטיין מוגדר ע"י

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

$R_{\mu\nu}$ הוא טנזור ריצ'י שנגזר מטנזור רימן $R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$.

R הוא סקלאר ריצ'י שנגזר מטנזור ריצ'י $R = R^\alpha{}_\alpha$.

ניתן לקבל את טנזור ריצ'י + מסימני קריסטופל של המטריקה:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\mu\alpha}$$

(שימו לב כי יש קונבנציות לפיהן טנזור ריצ'י מוגדר עם סימן מינוס יחסית להגדרה הנ"ל).

סימני קריסטופל נתונים ע"י המטריקה לפי:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\kappa}\left(g_{\kappa\nu/\mu} + g_{\kappa\mu/\nu} - g_{\mu\nu/\kappa}\right)$$

<u>עבור מטריקת FRW, סימני קריסטופל היחידים שלא</u>

<u>מתאפסים הינם:</u>

- $\Gamma^{t}_{uu} = \dot{a}\cdot a \;,\; \Gamma^{t}_{\theta\theta} = \dot{a}aS_k^2$

  $\Gamma^{t}_{\varphi\varphi} = \dot{a}aS_k^2\sin^2\theta$

- $\Gamma^{u}_{\theta\theta} = -S_k S_k' \qquad \Gamma^{u}_{\varphi\varphi} = -S_k S_k' \sin^2\theta$

  $\Gamma^{u}_{ut} = \Gamma^{u}_{tu} = \frac{\dot{a}}{a}$

- $\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta$

  $\Gamma^{\theta}_{\theta t} = \Gamma^{\theta}_{t\theta} = \frac{\dot{a}}{a} \;,\; \Gamma^{\theta}_{\theta u} = \Gamma^{\theta}_{u\theta} = \frac{S_k'}{S_k} \;,$

- $\Gamma^{\varphi}_{\varphi t} = \Gamma^{\varphi}_{t\varphi} = \frac{\dot{a}}{a} \;,\; \Gamma^{\varphi}_{\varphi u} = \Gamma^{\varphi}_{u\varphi} = \frac{S_k'}{S_k} \;,\; \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

מכיוון ששם $T_{\mu\nu}$ וגם $g_{\mu\nu}$ אלכסוניים, די לנו לחשב את איברי האלכסון של טנזור ריצ'י.

שימוש בנוסחה לעיל, והרבה אלגברה וסבלנות יתנו לאמיצים שבכם את התוצאה:

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{uu} = +a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k$$

$$R_{\theta\theta} = a\ddot{a}S_k^2 + 2\dot{a}^2S_k^2 + 2kS_k^2$$

$$R_{\varphi\varphi} = a\ddot{a}S_k^2\sin^2\theta + 2\dot{a}^2S_k^2\sin^2\theta + 2kS_k^2\sin^2\theta$$

$S_k'' = -kS_k$ כשהשתמשנו בזהות שמתקיים

$$\boxed{R_{tt}} = \Gamma^{\lambda}_{tt/\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{t\lambda/t} + \Gamma^{\eta}_{tt}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta} - \Gamma^{\eta}_{t\lambda}\Gamma^{\lambda}_{t\eta} =$$

לקוראכן:

$$= -\Gamma^{u}_{tu/t} - \Gamma^{\theta}_{t\theta/t} - \Gamma^{\varphi}_{t\varphi/t} - \left(\Gamma^{u}_{tu}\right)^2 - \left(\Gamma^{\theta}_{t\theta}\right)^2 - \left(\Gamma^{\varphi}_{t\varphi}\right)^2 =$$

$$= -3\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \boxed{-3\frac{\ddot{a}}{a}}$$

$$\boxed{R_{uu}} = \Gamma^{\lambda}_{uu/\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{u\lambda/u} + \Gamma^{\eta}_{uu}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta} - \Gamma^{\eta}_{u\lambda}\Gamma^{\lambda}_{u\eta} =$$

$$= \Gamma^{t}_{uu/t} - \Gamma^{\theta}_{u\theta/u} - \Gamma^{\varphi}_{u\varphi/u} + \Gamma^{t}_{uu}\left(\Gamma^{u}_{ut} + \Gamma^{\theta}_{\theta t} + \Gamma^{\varphi}_{\varphi t}\right) -$$

$$- \Gamma^{t}_{uu}\Gamma^{u}_{ut} - \Gamma^{u}_{ut}\Gamma^{t}_{uu} - \Gamma^{\theta}_{u\theta}\Gamma^{\theta}_{u\theta} - \Gamma^{\varphi}_{u\varphi}\Gamma^{\varphi}_{u\varphi} =$$

$$= \ddot{a}a + \dot{a}^2 - 2\left(\frac{S_k''}{S_k} - \cancel{\frac{(S_k')^2}{S_k^2}}\right) + 3\cdot\frac{\dot{a}}{\cancel{a}}\cdot a\dot{a} - 2\cdot\frac{\dot{a}}{\cancel{a}}\cdot a\dot{a} - \cancel{2\left(\frac{S_k'}{S_k}\right)^2}$$

$$= a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 - \frac{2S_k''}{S_k} = \boxed{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}$$

והחישוב עבור $R_{\theta\theta}$ ו- $R_{\varphi\varphi}$ דומה.

$$\boxed{R^{t}_{\ t}} = g^{t\lambda}R_{\lambda t} = g^{tt}R_{tt} =$$

נחשב את סקלר ריצ'י:

$$= -R_{tt} = \boxed{3\frac{\ddot{a}}{a}}$$

$$\boxed{R^{u}_{\ u}} = g^{u\lambda}R_{\lambda u} = g^{uu}R_{uu} = \frac{1}{a^2_{(t)}}\cdot\left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k\right) = \boxed{\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}}$$

$$\boxed{R^{\theta}_{\ \theta}} = g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} = \frac{1}{a^2_{(t)}S^2_{k(u)}}\cdot S_k^2 R_{uu} = \boxed{R^{u}_{\ u}}$$

$$\boxed{R^{\varphi}_{\ \varphi}} = g^{\varphi\varphi}R_{\varphi\varphi} = \frac{1}{a^2_{(t)}S_k^2(u)\sin^2\theta}\cdot S_k^2(u)\sin^2\theta)R_{uu} = \boxed{R^{u}_{\ u}}$$

$$\boxed{R} = R^{\alpha}_{\ \alpha} = 3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right) = \boxed{6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right]}$$

ומכאן האיברים האלכסוניים של טנזור איינשטיין:

$$G_{tt}=R_{tt}-\frac{1}{2}g_{tt}R=-3\frac{\ddot{a}}{a}-\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot 6\left(\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{k}{a^2}\right)=$$

$$\boxed{G_{tt}=3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{k}{a^2}\right)}$$

$$G_{uu}=R_{uu}-\frac{1}{2}g_{uu}R=\left(a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k\right)-\frac{1}{2}\cdot a^2_{(t)}\cdot 6\left(\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{k}{a^2}\right)=$$

$$\boxed{G_{uu}=-2a\ddot{a}-\dot{a}^2-k}$$

$$\boxed{\begin{aligned}G_{\theta\theta}&=G_{uu}\cdot S_k^2(u)\\ G_{\varphi\varphi}&=G_{uu}\cdot S_k^2(u)\sin^2(\theta)\end{aligned}}$$

מכיוון שמתקיים גם כן:

$$T_{\theta\theta}=T_{uu}\cdot S_k^2(u)$$

$$T_{\varphi\varphi}=T_{uu}\cdot S_k^2(u)\sin^2(\theta)$$

נקבל את אותה המשוואה עבור רכיבי φ,θ,u.

המשוואה עבור t:

$$G_{tt}+g_{tt}\Lambda=8\pi G T_{tt}$$

$$\Downarrow$$

$$3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{k}{a^2}\right)-\Lambda=8\pi G\rho$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\dot{a}^2}{a^2}=\frac{8\pi G\rho}{3}-\frac{k}{a^2}+\frac{\Lambda}{3}}$$

אם נחזיר את כל המקדמים של c, משוואה זו תיראה:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2}=\frac{8\pi G\rho}{3c^2}-\frac{kc^2}{a^2}+\frac{\Lambda}{3}$$

שימו לב שבכתיבה הזו, יש ל Λ יחידות של $\frac{1}{sec^2}$.

(זיכרו כי a חסר יחידות). ואז, כפי שראיתם, $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$
זה הזמן האופייני להתפשטות היקום בעידן נשלט
קבוע קוסמולוגי.
ניתן לשייך ל־Λ משמעות של "צפיפות אנרגיה של הריק"
אבל אז עלינו לכתוב:

$$\boxed{\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{G\Lambda}{3c^2}}$$

מעתה, נחזיר ל־Λ יחידות של $\frac{1}{sec^2}$ ונציב $c=1$.

<u>המשוואה השנייה:</u>

$$-2a\ddot{a} - \dot{a}^2 - k + a^2\Lambda = 8\pi G a^2 \cdot P$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{2\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} - 8\pi G P + \Lambda}$$

משוואת פרידמן הראשונה מתארת למעשה שימור אנרגיה ביקום
משוואת פרידמן השנייה מתארת את התאוצה של התפשטות היקום.