מכניקה קלאסית- תרגול 2

קירוב סדר שני וטור טיילור:

בשיעור שעבר ראינו משמעות קירוב לינארי:
עבור פונקציה גזירה f ונק' x_0, לכל x מספיק קרוב ל-x_0 ניתן לקרב את f לקו ישר ע"י $\boxed{f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}$. (קו ישר עם שיפוע $f'(x_0)$ שעובר דרך הנקודה $(x_0, f(x_0))$).
זהו הקו הלינארי האקויוולנטי לפונק' f בסביבת הנק' x_0.

באותה צורה, ניתן לקרב את פונק' הנגזרת של f, $f'(x)$ בסביבת אותה נקודה x_0 ע"י שימוש בנגזרת של f' שהיא בעצם הנגזרת השנייה של f ומסומנת ע"י $f''\equiv(f')'$
או לחילופין $f''(x)\equiv\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{d^2f}{dx^2}$.

נקבל שבסביבת x_0: $\boxed{f'(x)\simeq f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)}$

נבצע $\int_{x_0}^{x} dx$ לשני אגפי המשוואה כדי לקבל את הקירוב הריבועי לפונק' f בסביבת הנקודה x_0, שנקרא גם קירוב סדר שני:

$$\boxed{f(x)\simeq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2}$$

זהו נוסחא של פרבולה ומשמעותה היא שמקרבים את הפונק' f בסביבת הנקודה x_0 לפרבולה, במקום לקו ישר. זהו קירוב קצת יותר מדויק.

נדגיש שמכיוון שאנו דנים בנקודות x קרובות מאוד ל-x_0, הגורם $(x-x_0)$ הוא קטן מאוד, ועל כן $(x-x_0)^2$ קטן בהרבה מ-$(x-x_0)$. אנו מסמנים: $\boxed{(x-x_0)^2 \ll (x-x_0) \ll 1}$

נוהגים לאמר: בסביבת הנק' x_0, הפונק' f נראית בסדר אפס (הקירוב הכי גס) כמו פונק' קבועה $f(x_0)$. בסדר ראשון (קירוב לינארי) כמו קו ישר $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ כלומר הוספנו תיקון שלינארי בגורם $(x-x_0)$. בסדר שני (קירוב ריבועי) הפונק' נראית כמו פרבולה זהו הוספנו תיקון שריבועי בגורם $(x-x_0)$.

דוגמאות: נבחר $X_0=0$ ונקרב את הפונק' הבאות עד סדר שני ב-X:

(1) $f(x)=\sin(x) \Rightarrow f'(x)=\cos(x) \Rightarrow f''(x)=-\sin(x)$

$$\Rightarrow f(x)\simeq f(0)+f'(0)(x-0)+\tfrac{1}{2}f''(0)(x-0)^2=0+1\cdot x+\tfrac{1}{2}\cdot 0\cdot x^2=x$$

$\Rightarrow$ עד סדר שני ב-X, בסביבת $X_0=0$: $\boxed{\sin(x)\simeq x}$

כלומר "הפרבולה" הקרובה ביותר לפונק' $\sin(x)$ סביב 0, היא לא פרבולה, אלא קו ישר $y=x$.

(2) $f(x)=\cos(x) \Rightarrow f'(x)=-\sin(x) \Rightarrow f''(x)=-\cos(x)$

$$\Rightarrow f(x)\simeq f(0)+f'(0)(x-0)+\tfrac{1}{2}f''(0)(x-0)^2=1+0\cdot x+\tfrac{1}{2}(-1)x^2=1-\tfrac{1}{2}x^2$$

$\Rightarrow$ עד סדר שני ב-X, בסביבת $X_0=0$: $\boxed{\cos(x)\simeq 1-\tfrac{1}{2}x^2}$

וקיבלנו נוסחה של פרבולה, שהיא הפרבולה הקרובה ביותר ל-$\cos(x)$ סביב $X_0=0$.

(3) $f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x \Rightarrow f''(x)=e^x \Rightarrow f(0)=f'(0)=f''(0)=1$

$\Rightarrow$ עד סדר שני ב-X, בסביבת $X_0=0$: $\boxed{e^x\simeq 1+x+\tfrac{1}{2}x^2}$

נוסחאות הקירוב ניתנות להכללה לכל סדר ב-$(X-X_0)$. הנוסחה הכללית נקראת פיתוח טיילור (או טור טיילור):
עבור פונק' $f(x)$ שגזירה ∞ פעמים בסביבת נקודה X_0 (שימו לב שלא כל פונק' גזירה ∞ פעמים) מתקיים בסביבה זו:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}$$

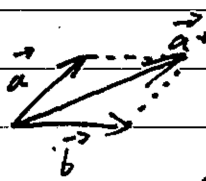
כאשר $f^{(n)}(x_0)$ היא הנגזרת ה-n-ית של f בנקודה X_0. קל לבדוק ששלושת האיברים הראשונים של הטור $(n=0,1,2)$ האינסופי הנ"ל משחזרים את הקירוב הריבועי שחישבנו ישירות למעלה.
בדר"כ (אך לא תמיד) בפיזיקה מסתפקים בקירוב סדר שני בלבד, ונזנח את הסדרים הגבוהים יותר

וקטורים: וקטור הינו אובייקט מתמטי שיש לו גם גודל וגם כיוון.

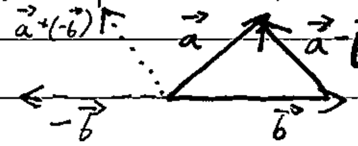
לדוגמא: מיקום, מהירות, תאוצה, כוח, וכו'.

זה לעומת סקלאר, שהוא אובייקט מתמטי עם גודל בלבד כמו מסה, טמפרטורה, נפח, וכו'.

מבחינה גיאומטרית, וקטור מסומן ע"י חץ:  גודל החץ פרופורציוני לגודל הוקטור וכיוון החץ מעיד על כיוון הוקטור במרחב.

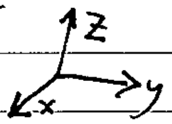


- חיבור שני וקטורים נעשה ע"י כלל המקבילית:
- כפל של וקטור בסקלאר פשוט משנה את גודלו של הוקטור בפקטור של הסקלאר, בעוד כיוון הוקטור לא משתנה.
- חיסור וקטורים:



- וקטור יחידה: וקטור שגודלו יחידה. לכל וקטור $\vec{a}$ ניתן למצוא וקטור יחידה בכיוון שלו ע"י כך שנחלק את $\vec{a}$ בגודל שלו:

$$\boxed{\hat{a}=\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}} \Longrightarrow \boxed{\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\hat{a}\equiv a\cdot\hat{a}}$$

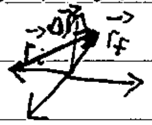
הצגה קרטזית: הרבה פעמים נוח להציג וקטורים בהצגה קרטזית, ע"י הגדרת מערכת צירים (למשל (x,y,z) ). וקטור מיוצג ע"י חץ שמתחיל בראשית הצירים, ומסתיים בנקודה כלשהי במרחב: $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$. לפעמים זה מסומן גם כ: $\vec{a}=a_x\hat{x}+a_y\hat{y}+a_z\hat{z}$, כאשר $\hat{x}$ וקטור יחידה בכיוון ציר x, וכנ"ל עבור $\hat{y}$, $\hat{z}$. הצגנו את $\vec{a}$ כסכום של וקטור בכיוון x, וקטור בכיוון y ווקטור בכיוון $\hat{z}$.
לפי משפט פיתגורס, הגודל של הוקטור $\vec{a}$ הוא: $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

סכום וקטורים נעשה רכיב-רכיב: $\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)$

וכנ"ל כפל בסקלאר: $c\cdot\vec{a}=(c\cdot a_x, c\cdot a_y, c\cdot a_z)$

וקל לראות שזה מתיישב עם ההגדרה הגיאומטרית ממקודם.

דוגמא: (א) מסוק נמצא 200_m מזרחה, ו-3_{km} דרומה ממוצב, בגובה 1.2_{km}.
משם הוא טס 350_m מערבה, 2.5_{km} צפונה ועולה עוד 300_m מעלה.
מהו מיקומו עכשיו?



⟸ נגדיר מערכת צירים שבה המוצב בראשית, כיוון $\hat{x}$ הוא מזרחה, $\hat{y}$ צפונה ו- $\hat{z}$ למעלה. המסוק התחיל עם וקטור מיקום: $\vec{r}_i = (200, -3000, 1200)_m$. משם הוא נסע רק שהוסיף למיקום שלו את הוקטור: $\vec{\Delta r} = (-350, 2500, 300)_m$. לכן מיקומו הסופי הוא $\vec{r}_f = (-150, -500, 1500)_m$

כלומר 150 מטר מערבה, 500 מטר דרומה ובגובה 1.5_{km}.

(ב) בהינתן שטס במהירות קבועה ובקו ישר במשך (10 דקות), מה מהירותו?

~~בין 2 הנקודות, נקבל:~~

$\cancel{V_x = -\frac{7}{12}}$

$\cancel{V_y = \frac{25}{36}}$

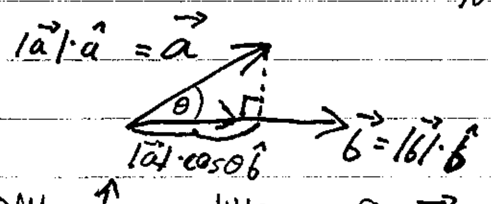
$\cancel{V_z = \frac{1}{12}}$

$$V_x = \frac{x_f - x_i}{\Delta t} = \frac{-350}{600} \cong -0.583 \frac{m}{sec} = -58.3 \frac{cm}{sec}$$
$$V_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{2500}{600} \simeq 4.167 \frac{m}{sec} = 416.7 \frac{cm}{sec}$$
$$V_z = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{300}{600} \simeq 0.5 \frac{m}{sec} = 50 \frac{cm}{sec}$$
$$\Rightarrow \boxed{\vec{V} = (-58.3, 416.7, 50)\frac{cm}{sec}}$$

מכפלה סקלרית: בהינתן 2 וקטורים במרחב $\vec{a}, \vec{b}$
ניתן להגדיר את המכפלה הסקלרית שלהם: $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$

בתרגיל תראו שזה שקול ל: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$ כאשר
θ היא הזווית בין הוקטורים.

משמעות גיאומטרית:



לוקחים את ההיטל של $\vec{a}$ על הכיוון $\hat{b}$, ומכפילים בגודל $|\vec{b}|$.
כפרט $a_x = \vec{a}\cdot\hat{x}$ וכו'

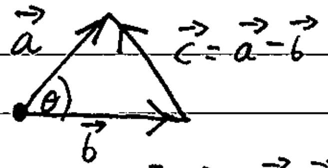
תכונות

$$\begin{cases} \vec a\cdot\vec b=\vec b\cdot\vec a \\ \vec a\cdot(\vec b+\vec c)=\vec a\cdot\vec b+\vec a\cdot\vec c \\ \vec a\cdot(k\cdot\vec b)=k(\vec a\cdot\vec b) \end{cases}$$ קל מאוד להראות לפי ההגדרה.

$$\vec a\cdot\vec a=|\vec a|\cdot|\vec a|\cdot\cos(0)=a^2$$

$\vec a\cdot\vec b=0 \iff$ אחד הוקטורים הוא 0, או $\vec a\perp\vec b$

משפט הקוסינוסים:



$$\boxed{c^2}=\vec c\cdot\vec c=(\vec a-\vec b)(\vec a-\vec b)=\vec a\cdot\vec a-\vec a\cdot\vec b-\vec b\cdot\vec a+\vec b\cdot\vec b=\boxed{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

בקורדינטות קרטזיות:

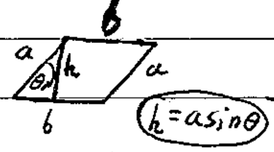
$$\hat x\cdot\hat x=\hat y\cdot\hat y=\hat z\cdot\hat z=1$$
$$\hat x\cdot\hat y=\hat x\cdot\hat z=\hat y\cdot\hat z=0$$

$\Leftarrow$ $\vec a\cdot\hat x=a_x$, וכו'.

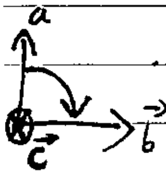
מכפלה וקטורית

התוצאה של מכפלה סקלרית היא סקלאר. ניתן גם להכפיל 2 וקטורים תלת מימדיים ולקבל וקטור ע"י מכפלה וקטורית: $\vec c=\vec a\times\vec b$

גודל הוקטור: $|\vec c|=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\sin\theta \Leftarrow$ שטח המקבילית שנפרשת ע"י $\vec a$ ו- $\vec b$.



כיוון הוקטור: ניצב למישור שנפרש ע"י $\vec a,\vec b$ לפי כלל יד ימין.



לכן: $$\boxed{\vec a\times\vec b=-\vec b\times\vec a}$$

עוד תכונות $$\begin{cases} \vec a\times(\vec b+\vec c)=\vec a\times\vec b+\vec a\times\vec c \\ \vec a\times(k\cdot\vec b)=k\cdot(\vec a\times\vec b) \end{cases}$$

$\vec a\times\vec b=0 \iff$ אחד מהם שווה ל-0 או $\vec a\parallel\vec b$

(בפרט $\vec a\times\vec a=0$ תמיד).

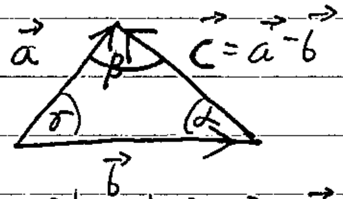
בקורדינטות קרטזיות: $\hat x\times\hat x=\hat y\times\hat y=\hat z\times\hat z=0$

מגדירים (בסיס ימני): $\hat x\times\hat y=\hat z \Rightarrow \boxed{\hat y\times\hat z=\hat x,\ \hat z\times\hat x=\hat y}$

ומכאן:

$$\vec a\times\vec b = (a_yb_z-a_zb_y)\hat x + (a_zb_x-a_xb_z)\hat y + (a_xb_y-a_yb_x)\hat z$$

משפט הסינוסים:



$$|\vec c\times\vec a| = |(\vec a-\vec b)\times\vec a| = |\vec a\times\vec a-\vec b\times\vec a| = |\vec a\times\vec b| = |\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\sin(\gamma)$$

$$= |\vec c|\cdot|\vec a|\cdot\sin(\beta)$$

$$\Downarrow$$

$$|\vec c|\cdot\sin(\beta) = |\vec b|\cdot\sin(\gamma)$$

$$\Downarrow$$

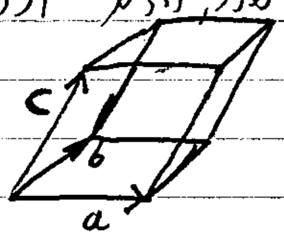
$$\boxed{\frac{|\vec c|}{\sin(\gamma)} = \frac{|\vec b|}{\sin(\beta)} = \frac{|\vec a|}{\sin(\alpha)}\quad (\text{באותה צורה})}$$

טענה: לכל 3 וקטורים:

$$\vec a\cdot(\vec b\times\vec c) = \vec b\cdot(\vec c\times\vec a) = \vec c\cdot(\vec a\times\vec b)$$

הוכחה: אם הוקטורים שלושתם באותו מישור, אז המכפלות כולן אפס, כי המכפלה הוקטורית ניצבת למישור וזה יאפס מכפלה סקלרית.

אחרת, הוקטורים לא באותו מישור, והם יוצרים מקבילון:



נתבונן ב- $\vec c\cdot(\vec a\times\vec b)$.

$\vec a\times\vec b$ הינו וקטור ישר כלפי מעלה שגודלו שטח בסיס המקבילית. מכפלה סקלרית בין $\vec c$ לבין וקטור זה נותן את היטל של $\vec c$ על כיוון $\vec a\times\vec b$ (כיוון מעלה) כפול שטח הבסיס. זה בדיוק גובה המקבילון כפול שטח הבסיס, כלומר נפח המקבילון.

ע"י שינוי ההגדרה של 'בסיס' ו'גובה', 2 האיברים האחרים יתנו בדיוק אותו דבר.

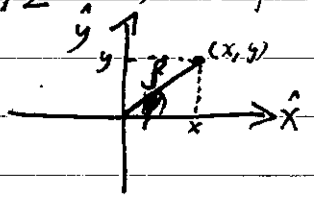
טענה:

$$\vec a\times(\vec b\times\vec c) = \vec b\cdot(\vec a\cdot\vec c) - \vec c\cdot(\vec a\cdot\vec b)$$

הוכחה בתרגיל בית

קורדינטות פולאריות, גליליות וספיריות

אמרנו שוקטור מייצג נקודה במרחב. עד כה, הצגנו נקודה במרחב באמצעות קורדינטות קרטזיות x, y, z. אבל זה לא הכרחי!



למשל בדו-מימד: ניתן לתאר כל נקודה ע"י ערך ה-x שלה וערך ה-y שלה, או לחילופין ע"י המרחק של הנקודה מהראשית, ρ, והזווית φ שנוצרת בין הוקטור לבין ציר $\hat{x}$ החיובי. קל לראות שמתקיים כי:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

לקורדינטות φ, ρ קוראים קורדינטות פולאריות, או קוטביות.

דוגמא:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \rho = 5 \\ \varphi \simeq 53.13^\circ \end{matrix} \qquad \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \rho = 5 \\ \varphi \simeq 126.87^\circ \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \rho = 5 \\ \varphi \simeq 306.87^\circ \end{matrix} \qquad \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \rho = 5 \\ \varphi \simeq 233.13^\circ \end{matrix}$$

קורדינטות אלו נוחות אם רוצים לתאר מערכת עם סימטריה מעגלית במקום סימטריה אוקלידית. למשל פונק' שתלויה במרחק מהראשית ולא בקורדינטות x, y בנפרד.

את הקורדינטות הקוטביות הדו-מימדיות, ניתן להכליל לתלת מימד בשתי דרכים:

(1) קורדינטות גליליות: נתאר את המרחב ע"י אוסף גלילים קונצנטריים שממורכזים על ציר $\hat{z}$. הקורדינטות φ, ρ נשארים אותו הדבר ומתארות את המרחק מציר z והזווית ביחס לציר $\hat{x}$. הקורדינטה $\hat{z}$ נשארת זהה:

$$(x, y, z) \longrightarrow (\rho, \varphi, z) \Longrightarrow \boxed{\begin{matrix} \rho = \sqrt{x^2+y^2} & x = \rho\cos\varphi \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & y = \rho\sin\varphi \\ z = z & z = z \end{matrix}}$$

$$\boxed{0 \le \rho < \infty \quad 0 \le \varphi < 2\pi \quad -\infty < z < \infty}$$

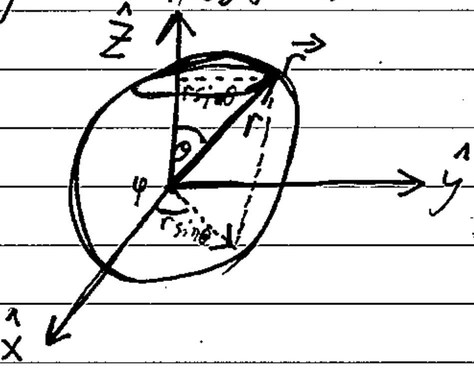
זה יהיה שימושי לתאר למשל צפיפות מסה של גליל מלא, כאשר הצפיפות תלויה רק במרחק מציר $\hat{z}$.

2) קורדינטות כדוריות: כדי לתאר נקודה ע"פ כדור הארץ

צריכים 2 קורדינטות: קו רוחב וקו אורך.
אבל זה בגלל שרדיוס כדוה"א ידוע $R_E \simeq 6400_{km}$. כדי לתאר
נק' כללית במרחב תלת מימדי נצטרך 3 מספרים:

- מרחק הנק' מהראשית - הרדיוס של הכדור עליו נמצאת הנקודה.
- קו רוחב
- קו אורך.

מגדירים את ה"ר" שלשה (r,θ,φ)



r - מרחק הנק' מהראשית $0 \le r < \infty$

קוטב צפוני   קוטב דרומי

θ - הזווית בין הוקטור לנק' לבין ציר $\hat{z}$. $0 \le \theta \le \pi$
על איזה קו רוחב אני נמצא. (קו המשווה נמצא ב- $\theta = \frac{\pi}{2}$)

φ - כמו בקור' קוטביות, מתאר את הזווית בין הוקטור (בין היטל הוקטור על מישור XY) לבין ציר $\hat{x}$ החיובי.
על איזה קו אורך אני נמצא.
מה המיקום שלי ע"פ "המעגל הקטן" ברדיוס $r\sin\theta$.

הטרנספורמציות:

$z = r\cdot\cos\theta$	$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$x = (r\cdot\sin\theta)\cdot\cos\varphi$	$\theta = arctg\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$
$y = (r\cdot\sin\theta)\cdot\sin\varphi$	$\varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$

דוגמא: נתונה נק' הנמצאת ב: $r = 5cm$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.
לתאר את הנק' בקור' גליליות (ρ,φ,z).
$\Leftarrow$ נעבור לקרטזיות ומשם לגליליות:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi = 5\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0 = 0$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi = 5\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-1) = -\frac{5\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}$$

$$z = r\cos\theta = 5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5\cdot\frac{1}{2} = 2.5\ \text{cm}$$

$$\Downarrow$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}$$

$$\varphi_{\text{גליל}} = \varphi_{\text{כדורי}} = \frac{3\pi}{2}\ \left(= \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\frac{5\sqrt{3}}{2}}{0}\right) = \operatorname{arctg}(\infty) = \left\{\begin{matrix} \frac{\pi}{2} & y>0 \\ \frac{3\pi}{2} & y<0 \end{matrix}\right\}\right)$$

$$Z_{\text{גליל}} = Z_{\text{קרטזי}} = 2.5\ \text{cm}$$