קוסמולוגיה תרגול 3

I) אנלוגיה קלאסית למשוואות פרידמן

ניתן לקבל את משוואות פרידמן הכלליות משיקולים ניוטוניים וללא יחסות כללית, עם תוספת אחת בלבד מיחסות פרטית, שצפיפות המסה-אנרגיה של חומר עם צפיפות מסה ρ ולחץ P היא $\boxed{\rho' = \rho + \frac{3P}{c^2}}$
(זהו למעשה העקבה, Trace, של טנזור התנע-אנרגיה T עבור גז אידיאלי), מה שיקבע את האינטראקציה הגרביטציונית זה לא ρ, אלא ρ'.

מכיוון שהיקום הוא הומוגני ואיזוטרופי, נוכל לבחור נקודה כלשהי ביקום ולדמיין כדור של חומר סביב הנקודה הזו, ברדיוס R. אנחנו צריכים ש-R יהיה מספיק גדול כך שבאמת נוכל להניח איזוטרופיות והומוגניות, אך מספיק קטן כך שנוכל להזניח אפקטים יחסותיים הנובעים מגיאומטריית היקום כולו. בפועל, זה אומר $100_{Mpc} \lesssim R \lesssim 4000_{Mpc}$

המסה הגרביטציונית של הכדור הזו: $\boxed{M' = \frac{4\pi}{3}\rho' R^3}$

חוקי ניוטון לגבי צופה על קליפת הספירה אומרים:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM'}{r^2}$$ (בגלל ההומוגניות, אין גרדיאנט לחץ $\vec{\nabla} P=0$)

כעת נניח $r_{(t)} = r_0 a_{(t)}$ ונקבל:

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{G4\pi}{3}\rho' = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right)}$$

כדי לבצע אינטגרציה, צריכים קשר בין P ל-ρ.

האנרגיה הפנימית של הכדור, כולל אנרגיית המנוחה היא $U = \rho c^2 \cdot V$. ביקום הומוגני ואיזוטרופי, אין זרימת חום:

$$đQ=0 \Rightarrow dS=0 \Rightarrow dU + PdV = 0.$$

$$c^2 d(\rho V) + p\,dV = (c^2\rho + p)dV + c^2 V d\rho = 0$$

מכאן:

$$\boxed{d\rho + \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{dV}{V} = 0}$$

כעת:

$$V \propto a^3 \Rightarrow dV = 3\frac{V}{a}da \Rightarrow \frac{dV}{V} = 3\frac{da}{a}$$

$$\Rightarrow d\rho + \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\cdot 3\frac{da}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{3p}{c^2} = -a\frac{d\rho}{da} - 3\rho}$$

$$\boxed{\frac{\ddot a}{a}} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) = \boxed{\frac{4\pi G}{3}\left(a\frac{d\rho}{da} + 2\rho\right)} \Big/ \cdot 2a\dot a$$

$$\Downarrow$$

$$2\dot a \ddot a = \frac{8\pi G}{3}\left[a^2\frac{d\rho}{da}\cdot\dot a + 2\rho a\cdot\dot a\right] = \frac{8\pi G}{3}\frac{d}{da}(\rho a^2)\cdot\dot a$$

$$\frac{d}{dt}(\dot a^2) = \frac{d}{dt}\left[\frac{8\pi G}{3}\rho a^2\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dot a^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 = const \equiv 2E} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}\dot a^2 - \frac{4\pi G \rho a^3}{3a}}$$

זו האנרגיה ליחידת מסה ביקום

השוואה עם משוואות פרידמן שראינו שבוע שעבר:

$$\frac{\dot a^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{kc^2}{a^2}$$

אומר לנו ש $\boxed{\frac{2E}{a^2} = -\frac{kc^2}{a^2}}$ (את Λ ניתן לספוג לתוך ρ

כפי שראינו שבוע שעבר ע"י הגדרת $\Lambda \equiv 8\pi G\rho_\Lambda$ כאשר

ρ_Λ זו צפיפות האנרגיה של הוואקום).

כלומר, האנרגיה ליחידת מסה ביקום ניתנת ע"י העקמומיות k

ולכן <u>זו קבועה</u> לכל אורך ההיסטוריה של היקום

$k=+1 \Rightarrow E<0 \Rightarrow$ יקום סגור וקשור

$k=-1 \Rightarrow E>0 \Rightarrow$ יקום פתוח ולא קשור

$k=0 \Rightarrow E=0$ יקום גבולי

II קשר בין z לבין t

נתחיל ממשוואת פרידמן:

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

(כאמור, בקורס עובדים ביחידות שבהן $c=1$)

ρ זו צפיפות המסה-אנרגיה הגרביטציונית, כשחילקנו ב-c^2 כדי לקבל יחידות של צפיפות מסה.

כמו שראינו שבוע שעבר, ל-ρ יש תרומה מקרינה ותרומה מחומר לא יחסותי:

$$\boxed{\rho_{(t)} = \rho_m(t) + \rho_r(t) = \rho_{m_0}\left(\frac{a_0}{a_{(t)}}\right)^3 + \rho_{r_0}\left(\frac{a_0}{a_{(t)}}\right)^4 = \rho_{m_0} a_{(t)}^{-3} + \rho_{r_0} a_{(t)}^{-4}}$$

($a_0 = 1$ היום לפי ההגדרה).

$$\Downarrow$$

$$H_{(t)}^2 \equiv \frac{\dot a^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho_{m_0}}{3}\frac{1}{a^3} + \frac{8\pi G\rho_{r_0}}{3}\frac{1}{a^4} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\begin{pmatrix} H = V/r \\ H = \dot r/r \\ H = \dot a/a \end{pmatrix}$$

$$= H_0^2\left[\underbrace{\frac{8\pi G\rho_{m_0}}{3H_0^2}}_{\Omega_{m,0}}\frac{1}{a^3} + \underbrace{\frac{8\pi G\rho_{r_0}}{3H_0^2}}_{\Omega_{r,0}}\frac{1}{a^4} \underbrace{- \frac{kc^2}{a^2H_0^2}}_{\Omega_{k,0}} + \underbrace{\frac{\Lambda}{3H_0^2}}_{\Omega_{\Lambda,0}}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\dot a^2 = H_0^2\left[\Omega_{m_0} a^{-1} + \Omega_{r_0} a^{-2} + \Omega_{k_0} + \Omega_{\Lambda_0} a^2\right]$$

כאשר $H_0, \Omega_{m_0}, \Omega_{r_0}, \Omega_{k_0}, \Omega_{\Lambda_0}$ הם הערכים כיום.
כלומר בזמן $t=t_0$. קיבלנו בעצם משוואה דיפרנציאלית ל-$a(t)$.

אם נעריך משוואה זו בזמן $t=t_0$, כלומר כיום, נקבל:

$$\dot a_0^2 = H_0^2\left[\Omega_{m_0} a_0^{-1} + \Omega_{r_0} a_0^{-2} + \Omega_{k_0} + \Omega_{\Lambda_0} a_0^2\right]$$

אבל $a_0 = 1$, $H_0 = \frac{\dot a_0}{a_0} = \dot a_0$ ולכן קיבלנו

$$\boxed{\Omega_{m_0}+\Omega_{r_0}+\Omega_{\Lambda_0}+\Omega_{k_0}=1}$$

כזכור $\Omega_{k_0}=-\frac{kc^2}{H_0^2}$, כלומר עבור יקום שטוח עם $\underline{k=0}$ מקבלים

$$\boxed{\Omega_{m_0}+\Omega_{r_0}+\Omega_{\Lambda_0}=1}$$

ומכיוון שהתצפיות מראות שצפיפות הקרינה זניחה כיום (הטמפ' של קרינת הרקע הקוסמית היום רק $\sim 2.7^\circ K$) מקבלים $\Omega_{r_0}\ll\Omega_{m_0}$ ולכן:

$$\boxed{\Omega_{m_0}+\Omega_{\Lambda_0}=1}$$

ביקום סגור עם $\underline{k=+1}$ מקבלים $\Omega_{k_0}<0$

ולכן $\boxed{\Omega_{m_0}+\Omega_{\Lambda_0}>1}$ $\Leftarrow$ יש מספיק חומר ביקום לבלום את התפשטות וליצור קריסה

ביקום פתוח $k=-1$ ולכן $\Omega_{k_0}>0$ ולכן $\boxed{\Omega_{m_0}+\Omega_{\Lambda_0}<1}$

אין מספיק חומר יחסית לצפיפות הקריטית ולכן היקום יתפשט לנצח.

~~מעתה, אנו נזניח את~~ $\boxed{\Omega_{r_0}\simeq 8.5\times10^{-5}}$ ~~לעומת~~ $\boxed{\Omega_{m_0}\simeq 0.3}$, $\boxed{\Omega_{\Lambda_0}\simeq 0.7}$ ~~ונדון ביקום שטוח~~ $\Omega_k=0$.

~~אם כך:~~ $\dot a^2 = H_0^2\left[\Omega_{m_0}a^{-1}+\Omega_{\Lambda_0}a^2\right] = H_0^2\left[\Omega_{m_0}a^{-1}+(1-\Omega_{m_0})a^2\right]$

$$\dot a = H_0\sqrt{\Omega_{m_0}a^{-1}+(1-\Omega_{m_0})a^2}$$

$\Omega_{r_0} \simeq 8.5\times10^{-5}$ **לפי מדידות:**

$\Omega_{m_0} \simeq 0.27$

$\Omega_{\Lambda_0} \simeq 0.73$

$\Omega_{k_0} \simeq 0$

באופן כללי:

$$\Omega_{k_0} = 1-(\Omega_{m_0}+\Omega_{r_0}+\Omega_{\Lambda_0})$$

ולכן:

$$H_0(t_2-t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{da}{\sqrt{\Omega_{m_0}a^{-1}+\Omega_{r_0}a^{-2}+\Omega_{\Lambda_0}a^2+1-(\Omega_{m_0}+\Omega_{r_0}+\Omega_{\Lambda_0})}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{H_0(t_2-t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{a\,da}{\left[\Omega_{r_0}+\Omega_{m_0}a+\Omega_{\Lambda_0}a^4+(1-\Omega_{m_0}-\Omega_{r_0}-\Omega_{\Lambda_0})a^2\right]^{\frac{1}{2}}}}$$

שים לב שאומנם $\Omega_{r_0} \ll \begin{Bmatrix}\Omega_{m_0}\\ \Omega_{\Lambda_0}\end{Bmatrix}$ אבל כאשר $t_1\to 0$ אז $a\to 0$ באינטגרנד, ולכן לאיבר זה יש חשיבות בזמנים מוקדמים.

אבל, מכיוון שכבר בזמנים מאוד מוקדמים $(a\simeq10^{-3})$ היקום נה"ד צנימה, לכל צורך פרקטי, ניתן בקרוב להתעלם מאיבר זה לחלוטין באינטגרנד.

מקרה I פשוט:

$\Omega_{r_0}=0,\ \Omega_{k_0}=0 \Longrightarrow$

$$H_0 t = \int_0^{a(t)} \frac{a\,da}{\left[\Omega_{m_0}a+(1-\Omega_{m_0})a^4\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \int_0^{a(t)} \frac{\sqrt{a}\,da}{\left[\Omega_{m_0}\left(1+\frac{1-\Omega_{m_0}}{\Omega_{m_0}}a^3\right)\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m_0}}}\int_0^{a(t)} \frac{\sqrt{a}\,da}{\left[1+\frac{1-\Omega_{m_0}}{\Omega_{m_0}}a^3\right]^{\frac{1}{2}}}$$

נציב $y^2 = \frac{1-\Omega_{m_0}}{\Omega_{m_0}}a^3 \Longrightarrow da = \frac{2}{3}\left(\frac{\Omega_m}{1-\Omega_m}\right)^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{3}}\,dy$

$$H_0 t = \int_0^{y(t)} \frac{y^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\Omega_m}{1-\Omega_m}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{\Omega_m}{1-\Omega_m}\right)^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{3}}\, dy}{\Omega_m^{\frac{1}{2}}\left[1+y^2\right]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{\Omega_m}{1-\Omega_m}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\Omega_m^{\frac{1}{2}}} \int_0^{y(t)} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_{m_0}}} \int_0^{y(t)} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_{m_0}}} \operatorname{arcsinh}(y_{(t)})$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{t = \frac{2}{3H_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_{m_0}}} \operatorname{arcsinh}\left[\sqrt{\frac{1-\Omega_{m_0}}{\Omega_{m_0}} a^3}\right]}$$

וכזכור $a = \frac{1}{1+z}$ כאשר z הוא ה- redshift

זהו קירוב מצוין לגבי היקום בעבר $z \lesssim 3000$

$$\left(z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_0'}{\lambda_0} - 1 = \frac{a_0}{a} - 1 \Rightarrow 1+z = \frac{a_0}{a} = \frac{1}{a}\right)$$

שימו לב שבקירוב הזה:

$$\boxed{\Omega_m} = \frac{8\pi G \rho_m}{3H^2} = \frac{8\pi G \rho_{m_0}}{3H_0^2} \cdot \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \cdot \left(\frac{\rho_m}{\rho_{m_0}}\right) = \boxed{\Omega_{m_0} \cdot a^{-3} \cdot \left(\frac{H_0}{H}\right)^2}$$

$$\boxed{1-\Omega_m} = \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \cdot \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 = \Omega_{\Lambda_0}\left(\frac{H_0}{H}\right)^2 = \boxed{(1-\Omega_{m_0})\left(\frac{H_0}{H}\right)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{t = \frac{2}{3H_{(t)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_m(t)}} \cdot \operatorname{arcsinh}\left[\sqrt{\frac{1-\Omega_m(t)}{\Omega_m(t)}}\right]}$$

בפועל, $\Omega_{m_0} \simeq 0.3$ $H_0 \simeq 70 \frac{km/sec}{Mpc}$.

לכל גוף שמיימי עם z מסוים, ניתן לקבוע את גיל היקום כאשר הפוטונים יצאו ממנו.

הנוסח נכון גם במקרה שבו $k\neq 0$, אבל עדיין מזניחים את Ω_{r_0}.

$$H_0(t_2-t_1)=\int_{a_1}^{a_2}\frac{da}{\left[\Omega_{m_0}a^{-1}+\Omega_{\Lambda_0}a^2+1-\Omega_{m_0}-\Omega_{\Lambda_0}\right]^{1/2}}=$$

$$=\int_{a_1}^{a_2}\frac{\sqrt{a}\,da}{\left[\Omega_{m_0}(1-a)+\Omega_{\Lambda_0}(a^3-a)+a\right]^{1/2}}$$

נציב $da=-\frac{1}{(1+z)^2}dz \leftarrow a=\frac{1}{1+z}$

$$H_0(t_2-t_1)=-\int_{z_1}^{z_2}\frac{(1+z)^{-1/2}\cdot(1+z)^{-2}\,dz}{\left[\Omega_{m_0}\Big(\underbrace{1-\frac{1}{1+z}}_{\frac{z}{1+z}}\Big)+\Omega_{\Lambda_0}\Big(\underbrace{\frac{1}{(1+z)^3}-\frac{1}{1+z}}_{\frac{1-(1+2z+z^2)}{(1+z)^3}=-\frac{z(2+z)}{(1+z)^3}}\Big)+\frac{1}{1+z}\right]^{1/2}}=$$

$$=\int_{z_2}^{z_1}\frac{(1+z)^{-5/2}\,dz}{\left[\Omega_{m_0}\left(z\cdot(1+z)^2\right)-\Omega_{\Lambda_0}\cdot z(2+z)+(1+z)^2\right]^{1/2}\cdot(1+z)^{-3/2}}$$

$$\boxed{H_0(t_2-t_1)=\int_{z_2}^{z_1}\frac{dz}{(1+z)\sqrt{(1+\Omega_{m_0}z)(1+z)^2-\Omega_{\Lambda_0}z(2+z)}}}$$

כדי להבין את הביטוי אינטואיטיבית, נתבונן ב: $\frac{dt}{dz}$

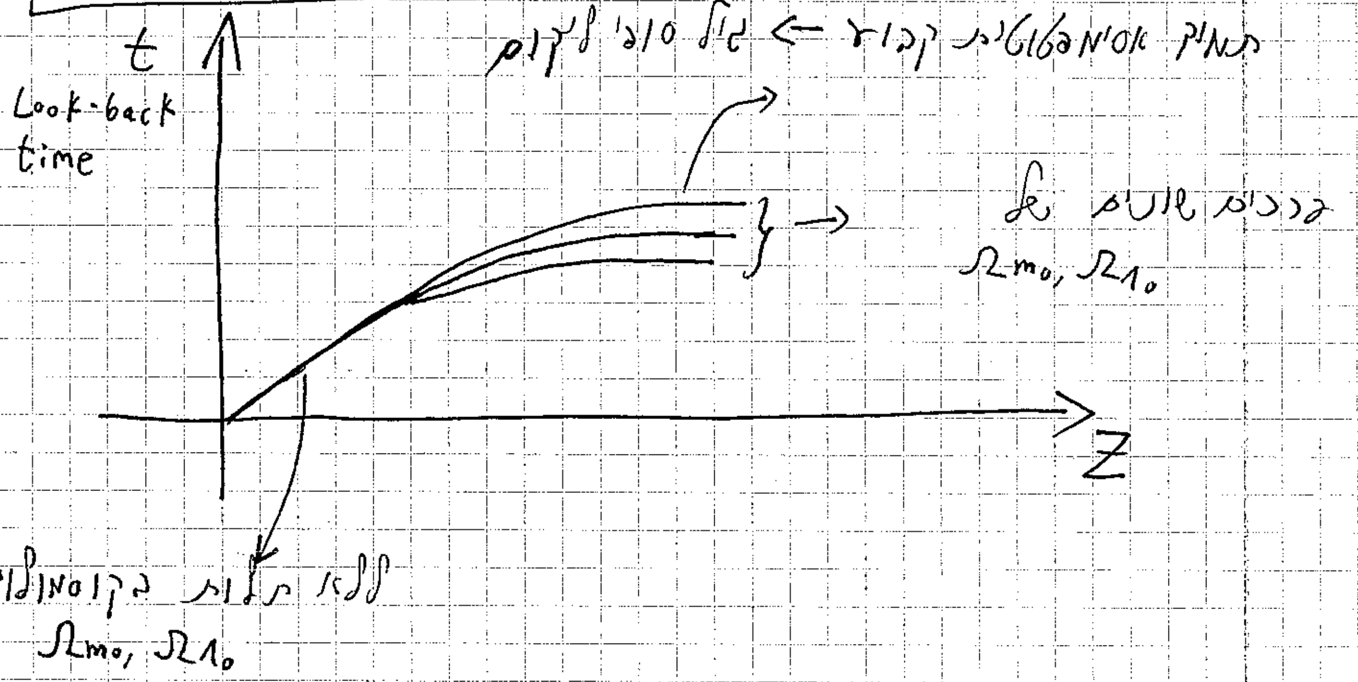
$$\frac{dt}{dz}=\frac{1}{H_0(1+z)}\left[(1+\Omega_{m_0}z)(1+z^2)-\Omega_{\Lambda_0}z(2+z)\right]^{-1/2}$$

מקומית, $z \to 0$ ומקבלים $\frac{dt}{dz} \xrightarrow{z \to 0} \frac{1}{H_0}$.

ללא תלות בערכים של $\Omega_{m_0}, \Omega_{\Lambda_0}$.

כמו כן, עבור z גדול: $\frac{dt}{dz} \xrightarrow{z \to \infty} \frac{1}{H_0 z}\left[\Omega_{m_0} z^3 - \Omega_{\Lambda_0} z^2\right]^{-\frac{1}{2}}$

$$\boxed{\frac{dt}{dz} \underset{z \gg 1}{\simeq} \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_{m_0}}} z^{-5/2} \sim 0}$$



z	t [Gyr]
0	13.7
1	6.5
2	3.3
3	1.5

z	t [redacted]
10	0.5 Gyr
50	47 Myr
100	16 Myr
1000	0.37 Myr

פיתרון משוואות פרידמן ליקום (שטוח) חומר $(\rho=\rho_m)$

$\underline{\Lambda=0}$

$k=0 \qquad a_{(t)}=\left(3\sqrt{\frac{a_*}{2}}\,t\right)^{2/3}$

$k=\pm1 \qquad a_{(\eta)}=a^*k\left[1-C_k(\eta)\right]$

$$t(\eta)=a^*k\left[\eta-S_k(\eta)\right]$$

$\underline{\Lambda\neq0:}$

$k=0 \qquad t=\frac{2}{3H_0}\frac{1}{\sqrt{1-\Omega_{m_0}}}\operatorname{arcsinh}\left[\sqrt{\frac{1-\Omega_{m_0}}{\Omega_{m_0}}a^3}\right]$

$k\neq0 \qquad H(t_2-t_1)=\int_{z_2}^{z_1}\frac{dz}{(1+z)\sqrt{(1+\Omega_{m_0}z)(1+z)^2-\Omega_{\Lambda_0}z(2+z)}}$

$$\boxed{y=\sinh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}}\Rightarrow e^{2x}-1=2ye^{x}\Rightarrow e^{2x}-2ye^{x}-1=0\Rightarrow e^{x}=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2}$$

$$e^{x}=y\pm\sqrt{y^2+1}=y+\sqrt{1+y^2}\Rightarrow\boxed{x=\operatorname{arcsinh}(y)=\ln\left[y+\sqrt{1+y^2}\right]}$$

באופן כללי $k=0$, $\Lambda\neq0$, בזמנים מאוחרים $(a\gg1)$

מקבלים $a_{(t)}\propto e^{H_0 t}$