חשמל ומגנטיות - תרגול 7

השבוע נתחיל בשני נושאים חדשים - קבלים ופולריזציה בחומר.

קבלים

נתחיל את הדיון בקבלים בקבל לוחות. יש שני לוחות מוליכים בשטח S
המרחק ביניהם D ($S \gg D^2$) ונניח כי אנו טוענים את
הלוח האחד במטען Q ואת האחר במטען $(-Q)$, מהו המתח
בין שני הלוחות?

כיוון שכל אחד מהלוחות במטען $\pm Q$ נוצרת עליו צפיפות משטחית $\pm\sigma = \pm\frac{Q}{S}$
במרחקים קטנים מהלוחות (ביחס למרחק D) השדה בסביבת הלוח
קבוע ושווה ל: $\pm 4\pi k\sigma$. כיוון שבין שני הלוחות השדות הינם
באותו כיוון נסיק $E_{in} = 4\pi k\sigma$ ולכן הפרש הפוטנציאל בין
שני הלוחות הוא $V = 4\pi k\frac{Q}{S}D$.

נשים לב כי $Q \propto V$ וקבוע הפרופורציה הוא מאפיין כלשהו
של הקבל. נגדיר אותו להיות ה"קיבול" של הקבל:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1}{4\pi k}\frac{S}{D}$$

יחידת המדידה של קיבול נקראית "פָרָד".

עבור קבלים בעלי צורה אחרת הביטוי המפורש ל- C יהיה שונה
אך תלותו תמיד תהיה מסדר L.

מתוך $U = \frac{1}{8\pi k}\int |E|^2 d^3x$ נוכל לראות כי:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$$

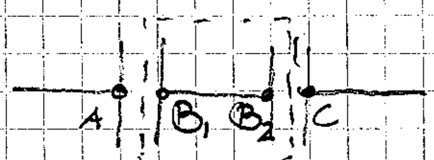
הנושא האחרון (בשלב זה) הקשור לקבלים הוא החיבור שלהם.

נניח כי נתונים מחוברים במקביל שני קבלים (S_1, S_2, D)

קל להבין כי הקיבול שלהם יהיה כזה של קבל אחד ששטחו הכללי הוא S_1+S_2 לכן נקבל:

$$C_{total} = \frac{1}{4\pi K}\left(\frac{S_1+S_2}{D}\right) = C_1 + C_2$$

לעומת זאת, אם נחבר את הקבלים (שכעת נתונים להיות (S, D_1, D_2)) בטור



נשים לב כי המתח בין נקודה A לנקודה C הוא:

$$V_{AC} = V_{AB_1} + \cancel{V_{B_1B_2}} + V_{B_2C} = V_{\text{קבל } AB} + V_{\text{קבל } BC} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

נשים לב כי כיוון שהקבלים המחוברים בקונקטור (ניטלי) מבודדים השלמות הרי ש- $Q_1 = Q_2$ ונסיק

$$V_{total} = \frac{Q}{C_{total}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Rightarrow C_{total}^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$$

באופן כללי אפשר לומר:

$$C_{tot} = \sum_i C_i$$ עבור חיבור קבלים במקביל

$$C_{tot} = \left(\sum_i C_i^{-1}\right)^{-1}$$ עבור חיבור קבלים בטור

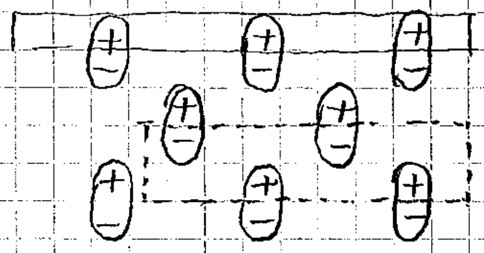
<u>קנה מידה לגודלו של פארד</u>: נדבר על קבל לוחות במרחק $D=1m$ וקיבול $C=1F$

נחשב מהו אורך צלע $L = \sqrt{S} = \sqrt{4\pi K D \cdot C} \cong 3.36\cdot 10^5 m$

אפילו עבור $D=1mm$ נמצא $L \approx 10m$ כך שאין באמת במציאות קבל בו $C=1F$

פולריזציה בחומר

הנושא הבא בו נסקרתם השבוע הוא נושא הפולריזציה בחומר.
נניח חומר חשמלי המורכב מדיפולים הפונים כולם לאותו כיוון
(הוא שלפחות יש להם כיוון ממוצע כלשהו)

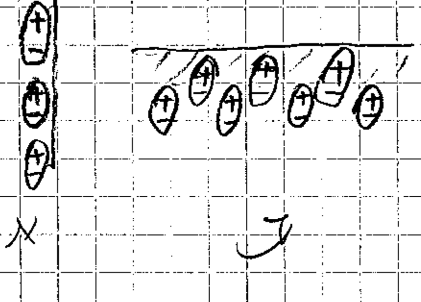


אלא שכל מישור בתוך של חומר כזה
הוא ניטרלי מבחינה חשמלית (הוא
מישור מקוטב) הרי שכל מישור כזה
בהכרח יהיה בעל צפיפות מטען
משטחית (כמו מישור המסומן בקו רציף)

הפולריזציה בתוך החומר היא ישות שדה חשמלי והשדה הזה פרופורציונלי
לריכוז הדיפולים (סמן את צפיפות הדיפול מוגדרת כ- $\vec{P}$
כלומר $\vec{P} = \frac{\vec{p}\cdot N_V}{V}$

כאשר $\vec{p}$ הוא דיפול בודד ($\vec{p}=q\cdot\vec{d}$) ו-N_V הוא מספר
הדיפולים בנפח V.

קל להבין אם כן מדוע $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}$ (כאשר σ_p הוא צפיפות
המטען שמקורה בדיפולים)



כאשר המשטח ניצב לכיוון הדיפולים
(א) אין צפיפות בכלל במישור
שכאשר המשטח מקביל (ב)
הצפיפות מקסימלית
כמו כן ברור שהצפיפות פרופורציונלית ל- $|\vec{P}|$.

כמו כן אפשר להראות (נוכיח בהמשך) כי $\rho_B = -\nabla\cdot\vec{P}$

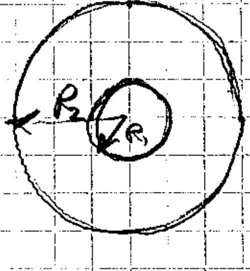
קבל גלילי - שאלה 1

נתון קבל גלילי בעל רדיוס פנימי R_1, רדיוס חיצוני R_2 ואורך L $R_1, R_2 \ll L$

א. מהו קיבול הקבל הגלילי

תשובה

נניח שהגליל החיצוני טעון במטען $-Q$ והפנימי במטען $+Q$
נמצא את השדה ברדיוס r ע"י בניית מעטפת-גאוס גלילית
בעלת אורך $l \ll L$,



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 4\pi K Q_{in} \Rightarrow E_{\perp} \text{ מעטפת}, E_{\parallel} \text{ בסיס}$$

$$2\pi r l E = 4\pi K Q_{in} \quad \Big| \quad Q_{in} = \begin{cases} \frac{l}{L} Q & R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ובסה"כ נסיק

$$E = \frac{2KQ_{in}}{rl} = \begin{cases} \frac{2KQ}{rL}, & R_1 < r < R_2 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

מהשדה E קל למצוא את V

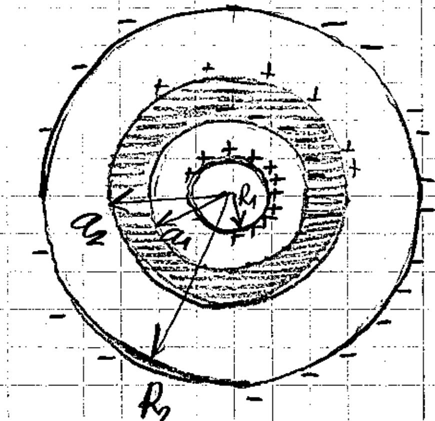
$$V = |\phi_{(R_2)} - \phi_{(R_1)}| = \int_{R_1}^{R_2} E_{(r)} dr = \frac{2KQ}{L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

מכאן קל למצוא את הקיבול

$$C_A = \frac{Q}{V} = \frac{L}{2K} \ln^{-1}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

* סימון לסעיף א'

ב. אל הקבל הגלילי מכניסים גליל קליפה בעל רדיוס חיצוני a_2 ופנימי a_1 $(R_1 < a_1 < a_2 < R_2)$. הגליל מוליך. מהו קיבול הגליל כעת.



כעת, הקליפה המוליכה הגלילית שבה מתאפס

ברדיוס $a_1 < r < a_2$

לגבי שדה באיזורים $a_2 < r < R_2$, $R_1 < r < a_1$

לא אמור לחול שום שינוי ולכן!

$$E_{(r)} = \begin{cases} \frac{2KQ}{rL} & R_1 < r < a_1 \\ & a_2 < R < R_2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ולכן:

$$V = \left|\phi_{(R_2)} - \phi_{(R_1)}\right| = \int_{R_1}^{a_1} dr\, E_{(r)} + \int_{a_2}^{R_2} dr\, E_{(r)} = \dots$$

$$\dots \frac{2KQ}{L}\left[\ln\left(\frac{a_1}{R_1}\right) + \ln\left(\frac{R_2}{a_2}\right)\right] = \frac{2KQ}{L}\ln\left(\frac{a_1 R_2}{R_1 a_2}\right)$$

$$C_B = \frac{Q}{V} = \frac{L}{2K}\ln^{-1}\left(\frac{a_1 R_2}{R_1 a_2}\right)$$

נשים לב כי יכולנו לפתור בדרך עם חיבור בטור של שני קבלים גליליים בעלי רדיוסים (a_1, R_1) ו-(R_2, a_2) והיינו מקבלים את אותה תוצאה!

$$C^{-1}_{R_1R_2} = C^{-1}_{R_1a_1} + C^{-1}_{a_2R_2} \Rightarrow C_{R_1R_2} = \left[C^{-1}_{R_1a_1} + C^{-1}_{a_2R_2}\right]^{-1}$$

$$C_{R_1R_2} = \frac{L}{2K}\left[\ln\left(\frac{a_1}{R_1}\right) + \ln\left(\frac{R_2}{a_2}\right)\right]^{-1} = \frac{L}{2K}\ln^{-1}\left(\frac{a_1 R_2}{R_1 a_2}\right)$$

b. כמה עבודה יש להשקיע כדי להוציא את הגליל משם (בהנחה Q קבוע)

$$W = U_{without} - U_{with} = \frac{Q^2}{2C_A} - \frac{Q^2}{2C_B} = \frac{Q^2}{2}\left[C_A^{-1} - C_B^{-1}\right]$$

$$= \frac{Q^2}{2}\cdot\frac{2K}{L}\left[\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - \ln\left(\frac{R_2 a_1}{R_1 a_2}\right)\right] = \frac{KQ^2}{L}\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$$

ב. כתבו את הנוסחה שקיבלתם $\left(C=\frac{L}{2K}\ln^{-1}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right)$
עבור הקיבול במקרה $R_2=R_1+\delta R$ $(\delta R \ll R_1)$
הסבר התוצאה זו אינטואיטיבית.

נפתח את הנוסחה:
נגדיר פרמטר קטן $\delta={}^{\delta R}/_{R_1}$ ולכן $R_2=(1+\delta)R_1$

$$C=\frac{L}{2K}\ln^{-1}\left(\frac{R_1(1+\delta)}{R_1}\right)=\frac{L}{2K}\ln^{-1}(1+\delta)=\ldots$$

$$\frac{L}{2K}\left[\ln(1+\delta)\right]^{-1}=\frac{L}{2K}\left(\delta-\frac{1}{2}\delta^2\right)^{-1}=\ldots$$

$$\frac{L}{2K\delta}\left(1-\frac{1}{2}\delta\right)^{-1}\cong\frac{L}{2K\delta}\left(1+\frac{1}{2}\delta\right)$$

נבין אינטואיטיבית את התוצאה
לשם כך (נסדר אותה מעט)!

$$C=\frac{LR_1}{2K\delta R}\left(1+\frac{\delta R}{2R_1}\right)=\frac{2\pi LR_1}{4\pi K\delta R}\left(1+\frac{\delta R}{2R_1}\right)$$

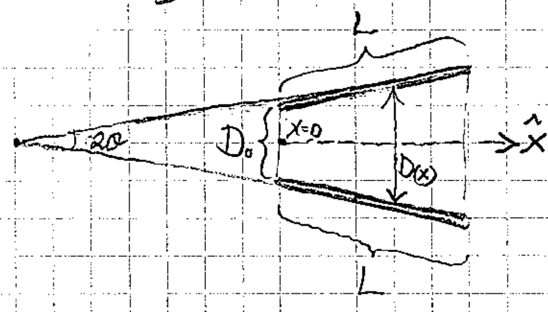
$$=\frac{2\pi L\left(R_1+\frac{\delta R}{2}\right)}{4\pi K\delta R}=\frac{2\pi L\cdot\left(\frac{R_1+R_2}{2}\right)}{4\pi K\delta R}=\frac{\frac{1}{2}(S_{in}+S_{out})}{4\pi K\cdot\delta R}$$

קיבלנו קיבול זהה לזה של קבל לוחות ששטח כל לוח הוא הממוצע של שטחי שני הגלילים והמרחק בין הלוחות הוא δR.
התוצאה, כלומר, לצפות לתוצאה זו שהרי למעשה כל אזור בקבל הגלילי מתנהג בקירוב כמו קבל מישורי, כיוון ש- $\delta R \ll R_i$.

שאלה 2

נעבור לשאלה נוספית על קבלים והפעם עם טרפזיולות

במקביל שעוברים קבלי לוחות.



שטח הלוחות $L \times L$ והמרחק בין הלוחות הוא D_0. $(D_0 \ll L)$

כיום שמיים השתמשו חלק מהקבלים נוצרה זווית יחסית 2θ בין שני לוחות הקבל. נתון כי: $\theta \ll \frac{D_0}{L}$

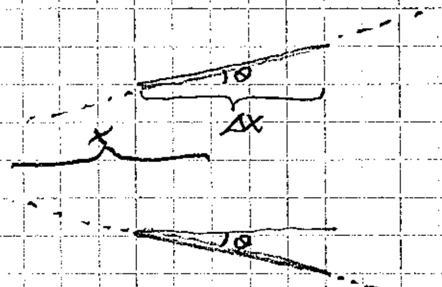
מצאו את קיבול הקבל המעוקם והשוו אותו לקיבול הקבל התקין.

נתחיל בחישוב $\sigma(x)$, צפיפות המטען המשטחית כפונקציה של $\hat{x}$.

מאחר והזווית קטנה מאוד, נוכל לקחת אזור בגודל $D(x) \ll \Delta X \ll X$

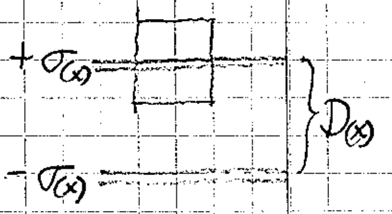
באזור זה מידת השינוי ב-D הוא: $\Delta D = \Delta X \cdot \tan\theta$

נשים לב כי באזור זה $D(x) = D_0 + 2X\tan\theta \gg \Delta D$



לכן, נוכל להתייחס לכל ΔX כזה כאל קבל לוחות עם המרחק $D(x)$, הקבל כזה נוכל לחשב את צפיפות המטען.

נבנה משטח גאוס וכך נמצא את השדה בתוך הקבל:



$E_{(x)} = 4\pi K \sigma(x)$

ולכן הפוטנציאל הוא $V_{(x)} = +4\pi K \sigma(x) D(x)$

נשים לב כי $V(x)$ קבוע לאורך כל אורך הלוחות הקבל ולכן

$$\sigma(x) = \frac{V}{4\pi K D(x)} = \frac{V}{4\pi K (D_0 + 2X\tan\theta)}$$

כעת נוכל לחשב את Q מאינטגרציה על כל הקבל:

$$Q=\int_0^{L\cos\theta} dx\cdot L\,\sigma(x)=\int_0^{L\cos\theta}\frac{VL\cdot dx}{4\pi K(D_0+2x\tan\theta)}=\dots$$

$$\frac{VL}{8\pi K\tan\theta}\int_0^{L\cos\theta}\frac{dx}{x+\frac{D_0}{2\tan\theta}}=\frac{VL}{8\pi K\tan\theta}\cdot\log\left[\frac{\frac{D_0}{2\tan\theta}+L\cos\theta}{\frac{D_0}{2\tan\theta}}\right]$$

$$=\frac{VL}{8\pi K\tan\theta}\log\left[1+\frac{2L\sin\theta}{D_0}\right]$$

נשתמש כעת בהנחה $\theta \ll \frac{D_0}{L}$ וכך ניתן לפתח:

$$\log\left[1+\frac{2L\sin\theta}{D_0}\right]\approx\frac{2L\sin\theta}{D_0}-\frac{1}{2}\left(\frac{2L\sin\theta}{D_0}\right)^2$$

וכך:

$$Q=\frac{VL}{8\pi K\tan\theta}\left(\frac{2L\sin\theta}{D_0}-\frac{2L^2\sin^2\theta}{D_0^2}\right)=\dots$$

$$\frac{V}{4\pi K}\frac{L^2}{D_0}\left[\cos\theta-\frac{L\sin\theta\cos\theta}{D_0}\right]=$$

$$\frac{V}{4\pi K}\frac{L^2}{D_0}\left[\left(1-\frac{1}{2}\theta^2\right)-\frac{L\theta\left(1-\frac{1}{2}\theta^2\right)}{D_0}\right]\overset{\text{סדר 1 ב-}\theta}{=}\frac{V}{4\pi K}\frac{L^2}{D_0}\left[1-\frac{L\theta}{D_0}\right]$$

ולסיום:

$$\boxed{C=\frac{Q}{V}=\frac{1}{4\pi K}\frac{L^2}{D_0}\left[1-\frac{L\theta}{D_0}\right]=C_0\left[1-\frac{L\theta}{D_0}\right]}$$

<u>שתי הערות</u>

א. יכולנו להבין שבעצם מדובר כאן בקבלים בעלי אורך dx שקיבול כל אחד מהם $\frac{1}{4\pi K}\frac{L\,dx}{D(x)}$ וכך לקבל את התוצאה מיד $C=\int dx\, C(x)$.

ב. נשים לב כי המרחק הממוצע בין הלוחות הוא $D_1=D_0+\frac{1}{2}(L\sin\theta)2$. קיבולו של קבל שזה המרחק בו הוא:

$$C_1=\frac{1}{4\pi K}\frac{L^2}{D_1}=\frac{1}{4\pi K}\frac{L^2}{D_0\left(1+\frac{L}{D_0}\sin\theta\right)}\approx C_0\left[1-\frac{L\theta}{D_0}\right]$$

בדיוק כמו הקבל הקודם.

שאלה 3

(הערה מפורשת בעלותה שיטה חמשה בתרגיל הבית)

בשאלה ח נוסה לתת אינטואיציה ל- $\rho_B = -\nabla\cdot P$

כאן מדובר של חומר שממדיו $L\times L\times L$ והקיטוב בו נתון ע"י: $\vec{P}_{(x,y,z)} = P_{(z)}\hat{z}$

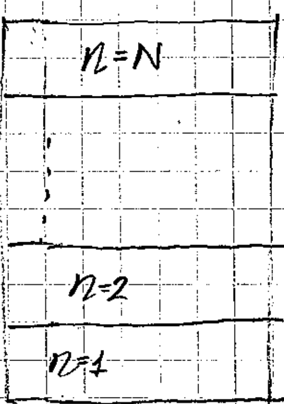
בשאלה 3 נשאלנו להראות כי $\rho_B = -\frac{\partial P}{\partial z}$.

בבית תראו כי במקרה הכללי $\vec{P} = \sum_{j=x,y,z} P_{j(x,y,z)}\hat{j}$ מתקיים $\rho_B = -\nabla\cdot\vec{P}$

הדרך בה נעשה זאת היא כזו.

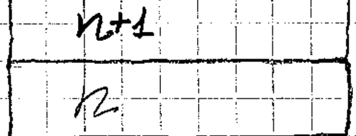
בשלב הראשון נניח קוביה בנפח L^3 המחולקת ל- N פרוסות בעובי Δ.

ניתן לכל פרוסה כזו מספר מ- 1 עד N.



לכל קוביה כזו ניחס קיטוב: $\vec{P}_n = P_{(n\Delta)}\hat{z}$

כעת נשאל מהי צפיפות המטען בשכבת הגבול שבין הפרוסה ה- n לפרוסה ה- n+1.



נדון תחילה בהשפעת הפרוסה ה- "n".

כזכור, עבור כל קיטוב $\vec{P}$ נוצרת צפיפות מטען $\sigma = \vec{P}\cdot\hat{n}$ בשולי החומר. לכן הפרוסה ה-n יוצרת צפיפות מטען $\vec{P}_n\cdot\hat{z}$

מצד שני, הפרוסה ה- n+1 יוצרת צפיפות מטען $\vec{P}_{n+1}\cdot(-\hat{z})$ ולכן

צפיפות המטען הכוללת בשכבה הזו היא: $\sigma_n = (\vec{P}_n - \vec{P}_{n+1})\cdot\hat{z}$

(צפיפות במעבר $n, n+1$)

~~כעת. נניח כי הפרוסה היא מאוד דקה ונפתח:~~

$$\cancel{\vec{P}_{n+1} = P_{((n+1)\Delta)}\hat{z} = P_{(n\Delta+\Delta)}\hat{z} = P_{(z+\Delta)}\hat{z} = \left(P_{(z)} + \frac{\partial P}{\partial z}\Delta\right)\hat{z} =}$$

$$\cancel{P_{(n\Delta)} + \frac{\partial P}{\partial z}\Big|\hat{z} = \vec{P}_n + \frac{\partial P}{\partial z}\Big|_n\hat{z}}$$

~~ונקבל:~~

$$\cancel{\sigma_n = -\frac{\partial P}{\partial z}\Big|_n\hat{z}}$$

אם ניקח כעת מספר מסויים של פרוסות (נניח m), [illegible]
שסך כל המטען הכלוא בהן הוא:

$$Q = L^2\left[\sigma_n + \sigma_{n+1} + \sigma_{n+2} + \ldots \sigma_{m-1}\right] =$$

$$L^2\left[(\vec{P}_n - \vec{P}_{n+1}) + (\vec{P}_{n+1} - \vec{P}_{n+2}) + \ldots (\vec{P}_{n+m-1} - \vec{P}_{n+m})\right]\hat{z} = L^2(\vec{P}_n - \vec{P}_{n+m})\hat{z}$$

נשים לב כי:

$$\vec{P}_{n+m} = P_{((n+m)\Delta)}\hat{z} = P_{(n\Delta + m\Delta)}\hat{z} = P_{(z+m\Delta)}\hat{z} =$$

בהנחה שרוחב ראשון מספיק הינו שכבה עם Δ קטן

$$\left(P_{(z)} + \frac{\partial P}{\partial z}\Big|_z m\Delta\right)\hat{z} = \left(P_{(n\Delta)} + \frac{\partial P}{\partial z}\Big|_z m\Delta\right)\hat{z} = \vec{P}_n + \frac{\partial P}{\partial z}\Big|_z m\Delta\,\hat{z}$$

$$Q = L^2\cdot\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\Big|_z m\Delta\right) = -(L^2 m\Delta)\frac{\partial P}{\partial z}\Big|_z$$ משכך!

נשים לב כי מוחה נפח של m פרוסות הוא $L^2 m\Delta$

הרי שקיבלנו:

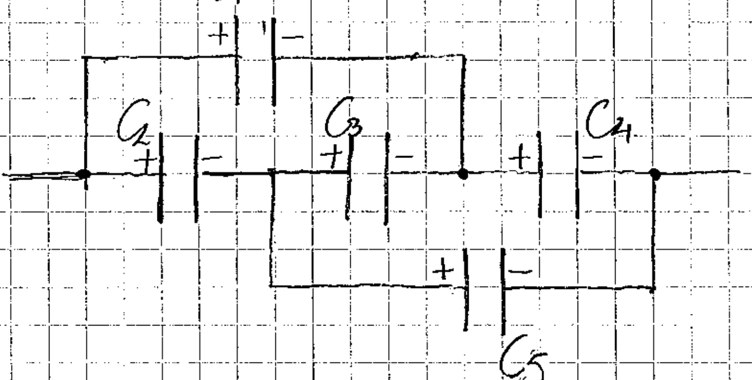
$$Q_{(z)} = -V\frac{\partial P}{\partial z}\Big|_z$$

ולאחר חלוקה ב- V נסיק:

$$\rho = -\frac{\partial P}{\partial z}\hat{z}$$

שאלה 4

בשאלה זו נראה מקרה מאד מורכב של חיבור קבלים.



נתונה המערכת שבציור.

מצא את הקיבול הכולל של המערכת כאשר:

א. $C_{1,2,5}=C_0$ $\quad C_{3,4}=2C_0$

ב. $C_n=C_0$

במקרה זה לא ניתן להשתמש ישירות בחיבור בטור או במקביל

נעזר בעקרונות הבסיסיים!

- על מוליך פנימי המנותק מההדקים המטען הכולל הוא 0
- המתח על לולאה סגורה הוא תמיד 0.

מכאן נוכל להשיג משוואות. נניח שאנחנו מתייחסים לכל המערכת כאל קבל שעליו מטען כולל Q ומתח V ונקבל:

$$Q=Q_1+Q_2 \qquad V_2+V_3-V_1=0$$
$$0=Q_3+Q_5-Q_2 \qquad V_3+V_4-V_5=0$$
$$0=Q_1+Q_3-Q_4$$

משוואה על מטען   משוואות על המתח

א. במקרה זה $C_n=nC_0$ לכן, מאחר ו- $V_i=\frac{Q_i}{C_i}$ נקבל כי

$$C_0^{-1}\left[\frac{Q_2}{1}+\frac{Q_3}{2}-\frac{Q_1}{1}\right]=0 \Rightarrow -2Q_1+2Q_2+Q_3=0$$

$$C_0^{-1}\left[\frac{Q_3}{2}+\frac{Q_4}{2}-\frac{Q_5}{1}\right]=0 \Rightarrow Q_3+Q_4-2Q_5=0$$

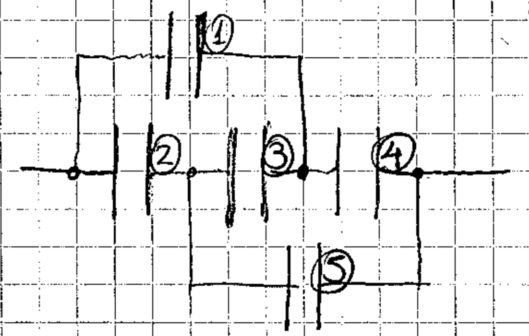
ולכן המשוואות הן בסה"כ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

את המשוואות הללו ניתן לפתור באמצעות דירוג מטריצה (כמ"ב תרגיל) שהשלמתי:

$$(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5) = \frac{Q}{19}(10, 9, 2, 12, 7)$$

כעת נלך לשלב את הקבלים הפוטנציאל של הפרש המתח הכולל



$Q_1 = \frac{10}{19}Q \quad C_1 = C_0$

$Q_2 = \frac{9}{19}Q \quad C_2 = C_0$

$Q_3 = \frac{2}{19}Q \quad C_3 = 2C_0$

$Q_4 = \frac{12}{19}Q \quad C_4 = 2C_0$

$Q_5 = \frac{7}{19}Q \quad C_5 = C_0$

ומכאן ש $V_i = \frac{Q_i}{C_i}$ נסיק! $(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5) = \frac{Q}{C_0}\left(\frac{10}{19}, \frac{9}{19}, \frac{1}{19}, \frac{6}{19}, \frac{7}{19}\right)$

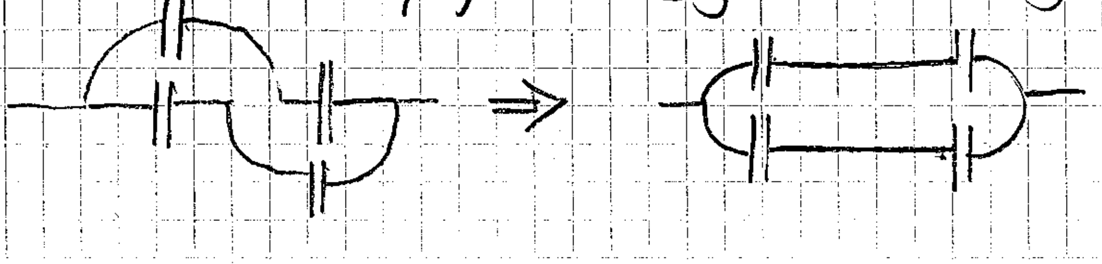
(נשים לב כי המתח הכולל: בסדר! $V = V_1 + V_4 = \frac{Q}{C_0} \cdot \frac{16}{19}$

(נשים לב כי אותה התוצאה מתקבלת גם מ- $V_2+V_3+V_4$ וגם מ- V_2+V_5).

ומכאן $V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{\frac{19}{16}C_0} \Rightarrow C = \frac{19}{16}C_0$

ה. כאשר $C_i = C_0$ הכל קל יותר. המערכת סימטרית, לכן $Q_3 = 0$

והמערכת הזאת שקולה כאילו C_3 לא קיים

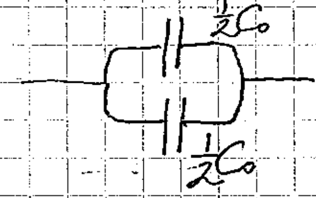


שני הקונפיגורציה הם קל מאוד לחשב.

נזכר כי בחיבור במקביל $C_{total} = \sum C_i$

ואילו בחיבור בטור $C_{total}^{-1} = \sum (C_i)^{-1}$

לכל הקיבול של  הוא $\frac{1}{2}C_0$

והמעגל שלנו מומר ב- 

זהו חיבור בטור ורק

$$C = \frac{1}{2}C_0 + \frac{1}{2}C_0$$

כלומר הסה״כ $C = C_0$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & Q \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4+2L_3]{L_3-L_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & Q \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -Q \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3-L_2]{\substack{(-L_2) \\ L_4+2L_2}}$$

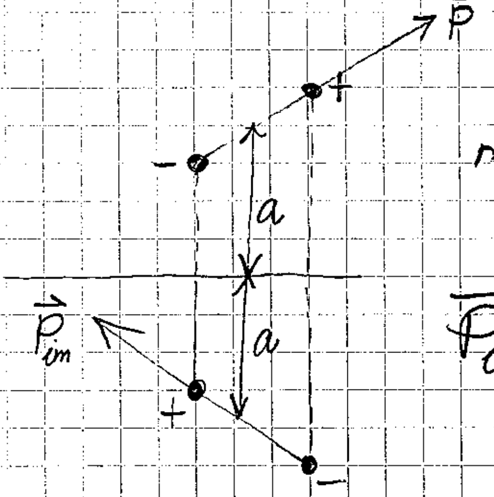
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & Q \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -Q \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_5 \mapsto L_3]{\substack{(-L_3) \mapsto L_4 \\ L_4 \mapsto L_5}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & Q \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & Q \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_5-5L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & Q \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & Q \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 12 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{L_5+7L_4}{19}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & Q \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{19}Q \end{array}\right) \xrightarrow[L_4-L_5]{L_3-L_4+3L_5}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & Q \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{19}Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{12}{19}Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array}\right) \xrightarrow[L_1-(L_2+L_5+L_3)]{L_2+L_5+L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10}{19}Q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{19}Q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{19}Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{12}{19}Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{19}Q \end{array}\right)$$

שאלה 5



בשאלה זו נבחן אפקט מעניין
בנוגע לדיפול ולמשטח מוליך.
נניח דיפול בעל מומנט $\vec{P}$ המונח במרחק a מהלוח
נגדיר $\vec{P} = P_x\hat{x} + P_y\hat{y}$

קל לראות כי דיפול הדמות הוא $\vec{P}_{im} = (-P_x)\hat{x} + P_y\hat{y}$

כעת נוכל לחשב כבר את הפוטנציאל
בנקודה במרחק x, y.

נזכור כי במרחק $\vec{r}$ מדיפול מתקיים $\phi_{(r)} = \frac{K\vec{P}\vec{r}}{r^3}$ לכן:

$$\phi_{(x,y)} = \frac{K\vec{P}(\vec{r}-a\hat{y})}{|\vec{r}-a\hat{y}|^{3/2}} + \frac{K\vec{P}_{im}(\vec{r}+a\hat{y})}{|\vec{r}+a\hat{y}|^{3/2}} =$$

$$\frac{K(P_x\hat{x}+P_y\hat{y})(x\hat{x}+(y-a)\hat{y})}{[x^2+(y-a)^2]^{3/2}} + \frac{K(-P_x\hat{x}+P_y\hat{y})(x\hat{x}+(y+a)\hat{y})}{[x^2+(y+a)^2]^{3/2}} =$$

[illegible]:

$$[x^2+(y\mp a)^2]^{-3/2} \cong [x^2+y^2\mp 2ya]^{-3/2} = [r^2 \mp 2ya]^{-3/2} = r^{-3}\left(1\mp\frac{2ya}{r^2}\right)^{-3/2}$$
$$\ldots = r^{-3}\left(1\pm\frac{3ya}{r^2}\right)$$

לכן:

$$\phi_{(x,y)} = \frac{K}{r^3}\Big[(P_x\hat{x}+P_y\hat{y})(x\hat{x}+(y-a)\hat{y})\left(1+\frac{3ya}{r^2}\right)+\ldots$$
$$\ldots(-P_x\hat{x}+P_y\hat{y})(x\hat{x}+(y+a)\hat{y})\left(1-\frac{3ya}{r^2}\right)\Big] =$$

$$\Phi(x,y)=\frac{K}{r^3}\Big[\big(xP_x+(y-a)P_y\big)\Big(1+\frac{3ya}{r^2}\Big)+\dots$$
$$\big(-xP_x+(y+a)P_y\big)\Big(1-\frac{3ya}{r^2}\Big)\Big]=$$

$$\frac{K}{r^3}\Big[\cancel{xP_x}+yP_y-\cancel{aP_y}+\frac{3xya}{r^2}P_x+\cancel{\frac{3y^2a}{r^2}P_y}-\frac{3ya^2}{r^2}P_y+\dots$$
$$-\cancel{xP_x}+yP_y+\cancel{aP_y}+\frac{3xya}{r^2}P_x-\cancel{\frac{3y^2a}{r^2}P_y}-\frac{3ya^2}{r^2}P_y\Big]=$$

$$\frac{K}{r^3}\Big[2yP_y+6\frac{xya}{r^2}P_x\Big]=\frac{2K}{r^2}\Big[P_y\sin\theta+3P_x\sin\theta\cos\theta\cdot\frac{a}{r}\Big]$$

ולכן בסה"כ:

$$\Phi(r,\theta)=\frac{2K}{r^2}\Big[P_y\sin\theta+3\Big(\frac{a}{r}\Big)P_x\sin\theta\cos\theta\Big]$$

יורד כמו $1/r^2$
כלומר מתנהג כדיפול

יורד כמו $1/r^3$
כלומר מתנהג כקוודרופול