מכניקה קלאסית - תרגול 3

נגזרות ואינטגרלים של פונקציות מרובות משתנים

עד עכשיו, דיברנו על פונקציות של משתנה אחד בלבד: $f(x)$

למשל: מיקום כתלות בזמן בתנועה חד מימדית $X(t)$ וכו'.
מהירות " " " " " $V(t)$

אך בטבע, לעיתים קרובות אנו נתקלים בגדלים שתלויים במספר רב יותר של משתנים.

למשל:
- מפה טופוגרפית נותנת לנו את הגובה כתלות בקורדינאטות (x,y) על מישור: $h = h(x,y)$
- צפיפות מסה של גוף מרחבי כלשהו, שתלויה במיקום בתוך הגוף: $\rho = \rho(x,y,z)$
- כוח שתלוי גם בזמן וגם במרחב: $F=F(x,y,z,t)$

איך ניתן להגדיר נגזרה ואינטגרציה עבור פונק' כללי?

שבוע שעבר הגדרנו נגזרת של פונק' $f(x)$ להיות קצב השינוי של הפונק' f לפי המשתנה x. אם יש לי פונק' של 2 משתנים $f(x,y)$, נוכל לדבר על קצב השינוי של f לפי המשתנה x, כאשר y נשאר קבוע.

זה יסומן

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}}$$

נגזרת חלקית של f לפי x

באותה צורה, אם נבחן את השינוי של f לפי y כאשר x הוא קבוע, נקבל את הנגזרת החלקית של f לפי y:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}}$$

ניתן לחשוב על להיות בתוך עמק, ולשאול איך משתנה הגובה של ההרים מסביב כתלות בכיוון. אם ממשיכים ללכת ישר בתוך העמק (כיוון x) אז הגובה לא משתנה וממשיכים ללכת במישור ($\frac{\partial f}{\partial x}=0$). לחילופין, אם פונים ימינה יש הר תלול שעולה מתוך העמק ($\frac{\partial f}{\partial y}>0$)

הכללה למספר כלשהו של משתנים ברורה: כל פעם נגזור רק לפי המשתנה הרלוונטי כאשר כל יתר המשתנים קבועים.

דוגמאות: I

$$f(x,y,z) = \cos(xy) - e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \sin(z)$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= -y\sin(xy) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -x\sin(xy) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \cos(z)
\end{aligned}}$$

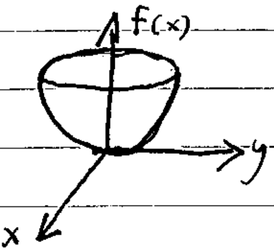
II

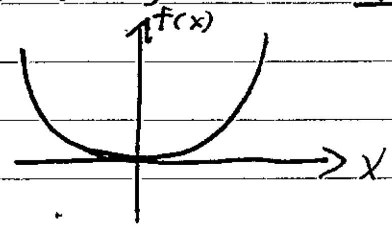
$$f(x,y,z,t) = A\cdot\cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$$

כאשר A, k_x, k_y, k_z, ω קבועים.

$f(x,y)=x^2+y^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y$

עוד דוגמא: $f(x)=x^2,\ f'(x)=2x$





אינטגרציה:

אם במימד אחד, אינטגרל מסויים בקטע $[a,b]$ נתן את השטח מתחת לגרף של f בקטע זה, בדו מימד, אינטגרל על תחום שבו $a_x<x<b_x$ ו- $a_y<y<b_y$ נותן את הנפח הכלוא בין הגרף של f לבין מישור XY בתחום זה. זה יסומן:

$$\int_{a_y}^{b_y}\left(\int_{a_x}^{b_x} f(x,y)\,dx\right)dy$$

תחילה נבצע את האינטגרציה לפי X כאשר נתייחס ל-y כאל קבוע. אז נבצע את האינטגרציה לפי y.
עקרונית ניתן להחליף את סדר האינטגרלים ולקבל את אותה תוצאה ולכן נבחר סדר שיהיה לנו נוח.

עבור פונק' של n משתנים $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ נסמן:

$$\int_{a_n}^{b_n}\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\cdots\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\underbrace{dx_1\,dx_2,\ldots dx_{n-1}\,dx_n}_{d^nX}$$

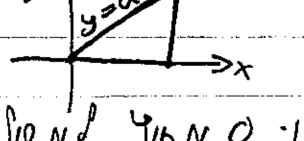
סימון $\equiv$

דוגמאות: (1)

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y+z)}\,dx\,dy\,dz=\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-x}\cdot e^{-y}\cdot e^{-z}\,dx\right)dy\,dz=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-y}e^{-z}\cdot\left(-e^{-x}\Big|_0^\infty\right)dy\,dz=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-y}e^{-z}\cdot[-(0-1)]\,dy\,dz=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-y}e^{-z}\,dy\,dz=\ldots=\underline{1}$$

(2) שטח משולש:



נניח שיש פונק' $f(x,y)$ ששווה ל- 1 בתוך המשולש ו- 0 מחוץ למשולש. התחום הוא $0\le y\le y_0$ ו- $\frac{1}{a}y\le x\le x_0$

$y_0=ax_0$

$$\boxed{S}=\int_0^{y_0}\int_{\frac{y}{a}}^{x_0}1\cdot dx\,dy=\int_0^{y_0}\left(x\Big|_{\frac{y}{a}}^{x_0}\right)dy=\int_0^{y_0}\left(x_0-\frac{y}{a}\right)dy=x_0\cdot y-\frac{y^2}{2a}\Big|_0^{y_0}=x_0y_0-\frac{y_0^2}{2a}=$$

$$=x_0y_0-\frac{y_0x_0}{2}=\boxed{\frac{1}{2}x_0y_0}$$

לחילופין ניתן היה להגדיר תחום ע"י $0\le x\le x_0$, $0\le y\le ax$ ולקבל אותה תוצאה.

③ נניח שלאותו משולש יש צפיפות מסה משטחית $\sigma(x,y)=\sigma_0\cdot\frac{x_0}{x}$
מהי מסת המשולש?

$$\boxed{M=}\iint\sigma(x,y)\,dxdy=\int_0^{x_0}\left(\int_0^{ax}\sigma_0\frac{x_0}{x}dy\right)dx=\sigma_0\,x_0\int_0^{x_0}\frac{1}{x}\cdot y\Big|_0^{ax}dx=\sigma_0\,a\cdot x_0\int_0^{x_0}1dx=$$

$$=\sigma_0\cdot ax_0\cdot x_0=\boxed{\sigma_0\cdot(x_0\cdot y_0)=2\cdot(\sigma_0\cdot S)}$$

שינוי קורדינטות:

במימד אחד, ראינו שניתן לשנות משתנה אינטגרציה. למשל:

$$\int xe^{-x^2}dx\longrightarrow u=x^2,\ du=2xdx\longrightarrow\frac{1}{2}\int e^{-u}du=-\frac{1}{2}e^{-u}+c=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c$$

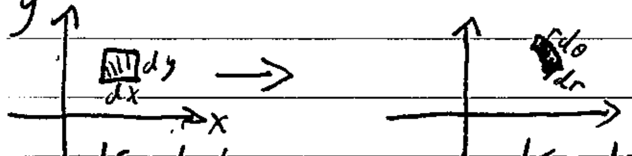
מבטא שינוי בקנה מידה.

הרי ה-(dx) באינטגרל הגיע מסכום שטחי מלבנים עם רוחב Δx.

כעת לא סוכמים מלבנים עם רוחב Δx אלא מלבנים עם רוחב Δu ומתקיים $\Delta u=2x\Delta x$ בגבול שבו $\Delta x\to 0$.

באינטגרלים ~~קוד~~ מימדיים יש לנו אלמנט שטח: $dxdy$. זה מגיע מגבול של סכום נפחים של תיבות עם שטח בסיס $(\Delta x\cdot\Delta y)$, וגובה $f(x,y)$. אם נרצה לעבור למשתנים חדשים במקום (x,y), נצטרך להבין איך נראה אלמנט השטח בקורדינטות החדשות.

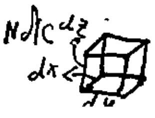
למשל בקורדינטות פולאריות:



$ds=dxdy$ $\qquad$ $ds=dr\cdot(rd\theta)=rdrd\theta$

בקורדינטות גליליות בתלת מימד:

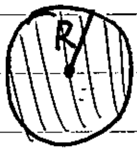
$dxdydz=dV$ נפח אלמנט



$dV=rdrd\theta dz$

דוגמא: שטח של עיגול. והיקף של מעגל.

נתון עיגול $x^2+y^2\le R^2$ (עיגול ברדיוס R)



התחום בקורדינטות קרטזיות: $-R\le x\le R$

$$-\sqrt{R^2-x^2}\le y\le\sqrt{R^2-x^2}$$

~~זה יוצא אינטגרל~~ מסובך!

אבל בקורדינטות פולריות, התחום הוא פשוט: $0\le\rho\le R$

$0\le\varphi\le 2\pi$

$$\Downarrow$$

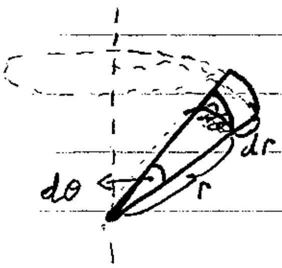
$$S_{(R)}=\int_0^{2\pi}\int_0^R 1\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^R d\varphi=2\pi\cdot\frac{R^2}{2}=\pi R^2$$

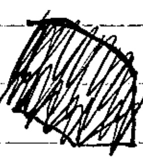
את היקף המעגל נקבל ע"י כך שנשים לב שקצב השינוי של השטח ככל שנגדיל את הרדיוס, הוא בדיוק היקף מעגל ברדיוס R. כלומר אם נגדיל את הרדיוס ממש בקצת $R\to R+dR$, השינוי בשטח הוא בערך ההיקף של מעגל ברדיוס R. לכן, ניתן לחשוב על ההיקף בתור הנגזרת של השטח!

$$P_{(R)}=\frac{dS_{(R)}}{dR}=(\pi R^2)'=2\pi R$$

קורדינטות כדוריות:

כעת אלמנט הנפח הוא מקטע מכדור:





- יש לנו כמובן (dr) משינוי ברדיוס.
- יש לנו שינוי בקשת לאורך קו אורך, משינוי של θ. הרדיוס הוא r, ולכן אורך הקשת יהיה $(rd\theta)$
- לבסוף, יש לנו שינוי בקשת לאורך קו רוחב, מלפנות בזווית φ. רדיוס המעגל הקטן הנ"ל הוא $r\sin\theta$ ולכן אורך הקשת הוא $(r\sin\theta d\varphi)$

כך נקבל: $dV=dr\cdot rd\theta\cdot r\sin\theta d\varphi$

$$\Downarrow$$

$$dV=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

דוגמא:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz$$

ניתן כאן לפתור את האינטגרל בקורדינטות כדוריות שם:

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. נקבל:

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{-r}\cdot r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\right)d\varphi = 2\pi\cdot\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\pi} r^2 e^{-r}\sin\theta\, d\theta\right)dr =$$

$$= 2\pi\cdot\int_0^{\infty} r^2 e^{-r}\cdot\underbrace{(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}}_{(-\cos(\pi))-(-\cos(0)) = -(-1)-(-1) = 1+1 = 2}\,dr = 4\pi\int_0^{\infty} r^2 e^{-r}\,dr =$$

נפתור בחלקים:

$f(r)=r^2 \quad g'(r)=e^{-r}$

$f'(r)=2r \quad g(r)=-e^{-r}$

$$=4\pi\cdot\left[\underbrace{-r^2e^{-r}\Big|_0^{\infty}}_{0}-\int_0^{\infty}2r\cdot(-e^{-r})\,dr\right] = 8\pi\int_0^{\infty} r e^{-r}\,dr =$$

$f(r)=r \quad g'(r)=e^{-r}$

$f'(r)=1 \quad g(r)=-e^{-r}$

$$=8\pi\left[\underbrace{-re^{-r}\Big|_0^{\infty}}_{0}-\int_0^{\infty}1\cdot(-e^{-r})\,dr\right] = 8\pi\int_0^{\infty}e^{-r}\,dr = 8\pi\left(-e^{-r}\right)\Big|_0^{\infty} = 8\pi(0-(-1))$$

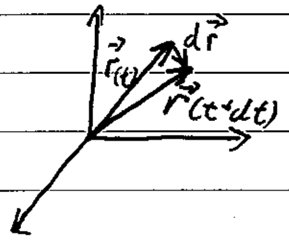
$$=8\pi$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz = 8\pi}$$

נגזרת של וקטור: נניח שיש לנו וקטור שמשתנה בזמן, כמו למשל מסלול תנועה של חלקיק במרחב: $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$.

הנגזרת של הוקטור יהיה קצב השינוי של הוקטור בזמן, ממש כמו שהנגזרת של פונק' $f(x)$ היתה קצב השינוי של f לפי x:



$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\vec{r}}=\lim_{dt\to 0}\frac{\vec{r}(t+dt)-\vec{r}(t)}{dt}=$$

$$=\lim_{dt\to 0}\frac{(x(t+dt)-x(t),\ y(t+dt)-y(t),\ z(t+dt)-z(t))}{dt}=(\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t))$$

כלומר אנו גוזרים את הוקטור רכיב-רכיב.

כמובן שהנגזרת של $\vec{r}(t)$ (מסלול החלקיק) נותן את מהירות החלקיק $\vec{V}(t)$ (שגם הוא וקטור) ונגזרת שניה תיתן תאוצה $\vec{a}(t)$.

דוגמא: נתון מסלול חלקיק: $\vec{r}(t)=(X_0\cos(wt),\ kt^2,\ 5)$

א) מצא את המהירות והתאוצה

ב) מצא נקודה בה המהירות מכוונת בכיוון ציר y.

א)

$$\vec{V}(t)=\dot{\vec{r}}(t)=(-X_0 w\sin(wt),\ 2kt,\ 0)$$

$$\vec{a}(t)=\dot{\vec{V}}(t)=\ddot{\vec{r}}(t)=(-X_0 w^2\cos(wt),\ 2k,\ 0)$$

ב)

$$V_{(x)}=0 \Rightarrow -x_0 w\sin(wt)=0 \Rightarrow \sin(wt)=0$$

$$\Downarrow$$

$n=0,\pm1,\pm2,\dots$ מספר שלם $wt=n\pi \Leftarrow t=\frac{n\pi}{w} \Leftarrow$

$$\boxed{\vec{r}=\left(X_0\cos(n\pi),\ k\cdot\left(\frac{n\pi}{w}\right)^2,\ 5\right)}$$

$\cos(n\pi)=1$:n זוגי

$\cos(n\pi)=-1$:n אי-זוגי

לחילופין: $(1,0,0)\cdot(-x_0\sin(wt)w,\ 2kt,\ 0)=-x_0 w\sin(wt)=0 \Leftarrow \hat{x}\cdot\vec{V}=0$

קינמטיקה

קינמטיקה היא חקר תנועתם של גופים, מבלי להתייחס לכוחות שפועלים עליהם. כשמתייחסים ישירות לכוחות, זה נקרא "דינמיקה".

קצב שינוי במיקום ← מהירות
קצב שינוי במהירות ← תאוצה.

$\vec{r}(t) \equiv (x_{(t)}, y_{(t)}, z_{(t)})$ ← וקטור מיקום כתלות בזמן.

$$(V_x(t), V_y(t), V_z(t)) = \vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

$$(a_x(t), a_y(t), a_z(t)) = \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{V}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

תנועה בתאוצה קבועה

$\underline{\vec{a} = const}$

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} \longrightarrow \vec{V}_{(t)} = \int \vec{a}\, dt = \vec{a} \cdot t + \vec{c}$$

שוויון רכיב-רכיב.

$$\Downarrow$$

$$\vec{V}(t=0) = \vec{a} \cdot 0 + \vec{c} = \vec{c} \equiv \vec{V}_0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{V}_{(t)} = \vec{a} \cdot t + \vec{V}_0$$

מעתה, נניח לשם פשטות תנועה חד מימדית בכיוון X עם תאוצה a:

$$\boxed{a_{(t)} = a, \quad V_{(t)} = at + V_0}$$

$$\Rightarrow x_{(t)} = \int V_{(t)}\, dt = \int (at + V_0)\, dt = \frac{at^2}{2} + V_0 t + \tilde{c} \Rightarrow x_{(t=0)} = \tilde{c} = x_0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{X(t) = x_0 + V_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2}$$

← מה המרחק אותו עברתי בין הרגעים t_1 ו t_2? (נתונה רק $V_{(t)}$)

$$\mathbf{X}_{(t)} \equiv \int v_{(t)}\, dt \Longrightarrow x_{(t)} = \mathbf{X}_{(t)} + C$$

לכן המרחק הוא:

$$\boxed{d} = X_{(t_2)} - X_{(t_1)} = \left(\bar{X}_{(t_2)} + c\right) - \left(\bar{X}_{(t_1)} + c\right) =$$

$$= \bar{X}_{(t_2)} - \bar{X}_{(t_1)} = \boxed{\int_{t_1}^{t_2} V_{(t)}\, dt}$$

שאלה: אדם נע במהירות V_0 לעבר אהובתו ובידו פרח.
הפרח יבול תוך T שניות. הוא מאיץ את מהלכו, אך תאוצתו
הולכת ופוחתת, לפי הביטוי $a_{(t)} = \frac{a_0}{(\alpha t+1)^2}$

מה המרחק לאהובתו אם נתון שהוא הגיע בדיוק בזמן?

$\Leftarrow$ יחידות: $[\alpha t] = [1] = 1 \Rightarrow [\alpha] = \frac{1}{[t]} = \frac{1}{sec}$

$[a_0] = [a] \Rightarrow [a_0] = \frac{cm}{sec^2}$

$\Downarrow$

$$V_{(t)} = \int a_{(t)}\, dt = \int a_0 (\alpha t+1)^{-2} dt = a_0 \int (1+\alpha t)^{-2} dt = a_0 \cdot \frac{(1+\alpha t)^{-1}}{-1 \cdot \alpha} =$$

$$= -\frac{a_0}{\alpha(1+\alpha t)} + C$$

$\Downarrow$

$$V(t=0) = V_0 = -\frac{a_0}{\alpha(1+0)} + C = C - \frac{a_0}{\alpha} \Rightarrow \boxed{C = V_0 + \frac{a_0}{\alpha}}$$

$\Downarrow$

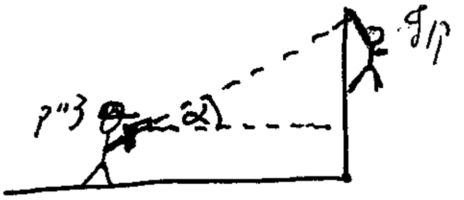
$$\left(\left[\frac{a_0}{\alpha}\right] = \frac{\frac{cm}{sec^2}}{\frac{1}{sec}} = \frac{cm}{sec} \right)$$

$$\boxed{V_{(t)} = V_0 + \frac{a_0}{\alpha} - \frac{a_0}{\alpha(1+\alpha t)}}$$

$$\Delta X = \int_0^T V_{(t)}\, dt = \int_0^T \left(V_0 + \frac{a_0}{\alpha} - \frac{a_0}{\alpha} \cdot \frac{1}{1+\alpha t}\right) dt = \left[V_0 t + \frac{a_0}{\alpha} t - \frac{a_0}{\alpha} \cdot \frac{\ln(1+\alpha t)}{\alpha}\right]_0^T =$$

$$= \left[V_0 T + \frac{a_0}{\alpha} T - \frac{a_0}{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha T)}{\alpha}\right] - \left[V_0 \cdot 0 + \frac{a_0}{\alpha} \cdot 0 - \frac{a_0}{\alpha} \cdot \frac{\ln(1+0)}{\alpha}\right] =$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta X = \left(V_0 + \frac{a_0}{\alpha}\right) T - \frac{a_0}{\alpha^2} \ln(1+\alpha T)}$$



הצייד והקוף

צייד עומד במרחק L מעץ בגובה h.
על ראש העץ יושב קוף.
הצייד מכוון את הרובה שלו אל עבר הקוף ויורה
ברגע הירייה, הקוף נבהל, עוזב את העץ ומתחיל ליפול חופשית.
האם הכדור יפגע בקוף ובאיזה גובה?

$$\vec{r}_{monkey} = \left(L, h - \tfrac{1}{2} g t^2\right)$$

$\Longleftarrow$ נבחר ראשית צירים במיקום הצייד, $\hat{x}$ אל עבר העץ ו-$\hat{y}$ כלפי מעלה. מהירות הקליע ההתחלתית היא $\vec{V}_0$.

$$\vec{r}_{bullet} = \left(V_{0,x} t, V_{0y} t - \tfrac{1}{2} g t^2\right)$$

<u>חישוב הזמן שבו הקליע יגיע לעץ:</u>

$$V_{0x} t = X_{bullet} = L$$
$$\Downarrow$$
$$t = \frac{L}{V_{0,x}} = \frac{L}{V_0 \cos\alpha}$$

<u>הגובה של הקליע בזמן זה:</u>

$$y_{bullet} = V_{0y} t - \tfrac{1}{2} g t^2 =$$
$$= V_0 \sin\alpha \cdot \frac{L}{V_0 \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{L}{V_0 \cos\alpha}\right)^2 = L \tan\alpha - \frac{1}{2} \frac{g L^2}{V_0^2 \cos^2\alpha} =$$
$$= L \cdot \frac{h}{L} - \frac{1}{2} \frac{g L^2}{V_0^2 \cos^2\alpha} = \boxed{h - \frac{g L^2}{2 V_0^2 \cos^2\alpha} = y_{bullet}}$$

<u>גובה הקוף בזמן זה:</u>

$$y_{monkey} = h - \tfrac{1}{2} g t^2 = h - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{L}{V_0 \cos\alpha}\right)^2$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{y_{monkey} = h - \frac{g L^2}{2 V_0^2 \cos^2\alpha} = y_{bullet}}$$

תנועה מעגלית

ראיתם שכאשר גוף מבצע תנועה מעגלית (קצובה) ברדיוס R,
ישנה תאוצה צנטריפטלית כלפי מרכז הסיבוב שערכה:

$$a_R = \frac{V^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R$$

V הינו המהירות המשיקית של הסיבוב
$\omega = \frac{2\pi}{T}$ הינו התדירות הזוויתית של הסיבוב כאשר T זה זמן המחזור.

$$V = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi}{T}\cdot R = \omega R$$

שאלה:

(1) מהי התדירות הזוויתית של כדה"א?

(2) האם בכל נק' תדירות זו זהה?

(3) האם בכל נק' המהירות המשיקית זהה?

$$T = 24_h = \underbrace{24\cdot 60\cdot 60}_{}\,_{sec} = 86{,}400_{sec} = 8.64\times 10^4_{sec} \quad (1)$$

$2.4\times 6\times 6\times 10^3 = 2.4\cdot 36\times 10^3 = 2.4\cdot 3.6\times 10^4 \simeq$ [redacted] $2.5\cdot 3.5\times 10^4 =$
$= (7.5+1.25)\times 10^4 = 8.75\times 10^4$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8.64}\times 10^{-4} \simeq \frac{6.28}{8.64}\times 10^{-4} \simeq \frac{3}{4}\times 10^{-4} = 7.5\times 10^{-5}\,\frac{rad}{sec}$$

(למעשה, זה $\simeq 7.2\times 10^{-5}\,\frac{1}{sec}$)

(2) כן, כי בכל נקודה זמן המחזור שווה.

(3) לא, כי $V=\omega R$ אך רדיוס הסיבוב תלוי בקו רוחב.