אי-יציבות לינארית בתחום היחסותי

שבוע שעבר דנו באבולוציה הלינארית של פלוקטואציות
בשדה הצפיפות, כשהיקום נשלט חומר לא יחסותי.
רשמנו את משוואות הרצף לצפיפות ומשוואות אוילר
ביחד עם משוואת פואסון, ישירות בקורדינטות
co-moving, הנחנו ש: $\delta = \frac{\rho(x)-\bar{\rho}}{\bar{\rho}} \ll 1$

וכן ש: $a\vec{V} = \dot{\vec{r}} - \dot{a}\vec{x}$ הווי קטן $(V \ll Hx)$

בהגדרה:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\rho + \vec{\nabla}(\rho\vec{V}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} + 2H\vec{V} + \frac{\ddot{a}}{a}\vec{x} = -\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \vec{\nabla}\phi\right) \\ \nabla^2\phi = 4\pi a^2 \cdot G\rho \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

אחרי לינאריזציה:

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + 2H\psi + \frac{1}{a^2}\left(\frac{P_1}{\rho_0} + \phi_1\right) = 0 \\ \nabla^2\phi_1 = -4\pi a^2 G\rho_0\delta \end{cases}$$

$\vec{V} = \vec{\nabla}\psi$
זרימת פוטנציאל
כי $\vec{\omega} = \vec{\nabla}\times\vec{V}$
דועך

$$\Downarrow$$

• פורייה: $\delta, V, \psi, \varphi \propto e^{i(\vec{k}\vec{x})}$

• הפרעות אדיאבטיות: $P = C_s^2 \cdot \rho$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2 \delta_k}{\partial t^2} + 2H\frac{\partial \delta_k}{\partial t} + \left[\frac{k^2}{a^2}C_s^2 - 4\pi G\rho_0\right]\delta_k = 0$$

שימו לב שבסקלות

$$\frac{k^2 C_s^2}{a^2} > 4\pi G \rho_0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda^2 = \left(\frac{2\pi}{k} a\right)^2 = \frac{a^2 4\pi^2}{k^2} < \frac{\pi C_s^2}{G\rho_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lambda < \lambda_J = \frac{C_s}{\sqrt{G\rho_0/\pi}}}$$

פתרון המשוואה הוא אוסילטור הרמוני.
כלומר לחץ, שמיוצג כאן ע"י C_s, מייצב הפרעות
על סקלות שקטנות מאורך גל ג'ינס: λ_J
מכיוון ש: $t_{dyn} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho}}$ זה הזמן הדינאמי להפרעות
גרביטציוניות, התנאי ליציבות הוא

זהו ה sound crossing time של הפרטורבציה, כלומר
הזמן שלוקח לגל קול (הפרעה בלחץ) לחצות את
הפרטורבציה ולחזור (וכך בעצם החומר מייצב את עצמו)
מקיים:

$$\boxed{t_{cross} \simeq \frac{\lambda}{C_s} < t_{dy} \simeq \frac{1}{\sqrt{G\rho}}}$$

אחרת, הלחץ לא מספיק להציל ויש קריסה גרביטציונית
ואנחנו רואים שזה קורה בסקלות גדולות.
בגבול שבו $k \to 0$ (סקלות מאוד גדולות)
קיבלנו פתרון דועך ופתרון גדל:

$$\delta(t) \propto t^{2/3} \propto a(t) \qquad \delta(t) \propto t^{-1} \propto H(t)$$

אבל כל האנליזה הזו לא תקפה בתחום שבו לחץ הקרינה שולט על החומר ובעצם הכל יחסותי.

נאיבית, יכולנו לקחת את המשוואה שקיבלנו ל- δ_k

ולהציב: (1) $C_s^2 = \frac{P}{\rho} = \frac{c^2}{3}$, שכן בחומר יחסותי

$P = \frac{1}{3}\rho c^2$.

(2) לזכור שיחסות כללית אומרת לנו שלמעשה

$$\nabla^2\phi = -4\pi G\left(\rho + 3\frac{P}{c^2}\right) = -8\pi G\rho$$

זה יתן משוואה: $\frac{\partial^2\delta_k}{\partial t^2} + 2H\frac{\partial\delta_k}{\partial t} + \left[\frac{k^2c^2}{3a^2} - 8\pi G\rho_0\right]\delta_k = 0$

זה כמעט נכון.

אבל, טיפול יחסותי מלא, שאותו תעשו בתרגיל בית מראה שבמקום 8π, יש לרשום $\frac{32\pi}{3}$.

ב השינויים המהותיים, חוץ ממשוואת פואסון, הם לרשום את משוואות אוילר עבור נוזל יחסותי, שתפתחו אותו בבית, וגם לשנות את משוואות הרצף.

צפיפות האנרגיה של הקרינה לא נשמרת כשהיקום מתפשט, כי הפוטונים עוברים הסחה לאדום.

אבל, אנחנו דנים בתקופה עם אטימות אופטית מאוד גבוהה ומהלך חופשי ממוצע קצר לפוטונים. הם כלואים ע"י האלקטרונים (הפלזמה הבריונית) בגלל פיזור תומפסון. לכן, ניתן להתייחס לכל אלמנט קרינה כאל- confined, ולכן אין זרימה של חום בין האלמנטים. לכן יש שימור אנטרופיה עבור ה- photon fluid

בבית, תראו שאם צפיפות האנרגיה של הקרינה היא ρ

אז צפיפות האנטרופיה היא $\propto \rho^{3/4}$

ולכן משוואת הרצף היא $\boxed{\frac{\partial \rho^{3/4}}{\partial t} + 3H\rho^{3/4} + \vec{\nabla}\cdot(\rho^{3/4}\cdot\vec{v}) = 0}$

מהי V?

הרי אם זה פוטונים, אז $V=c$. למה מניחים שהוא קטן?

קמ"ע ב אלמנטים גדולים של קרינה. כאמור, הקרינה לא יכולה לדלוף החוצה בגלל פיזורים רבים עם אלקטרונים, למרות שתרומת האלקטרונים למסה-אנרגיה היא זניחה. מיחסות כללית, 2 האלמנטים הנ"ל יימשכו אחד לשני גרביטציונית, על זמן אופייני שהוא $t_{dyn} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho_r}}$ וזה הזמן שקובע את V, שאנו מניחים כי הוא אכן קטן.

בסה"כ:

$$\frac{\partial^2 \delta_k}{\partial t^2} + 2H\frac{\partial \delta_k}{\partial t} + \left(\frac{k^2c^2}{3a^2} - \frac{32\pi}{3}G\rho_u\right) = 0$$

נשתמש בעובדה שהיקום שטוח $\rho_u = \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \Omega = 1$

ובעובדה ש:

$$\begin{cases} H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t} \\ \frac{32\pi G\rho_u}{3} = 4H^2 = \frac{1}{t^2} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \delta_k}{\partial t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial \delta_k}{\partial t} + \left(\frac{k^2c^2}{3a^2} - \frac{1}{t^2}\right)\delta_k = 0}$$

סקלת ג'ינס עבור הקרינה היא: $\lambda_J(t) \sim \frac{a(t)}{k(t)} \sim c\cdot t$ שזה סקלת האופק.

כלומר הקרינה מייצבת הפרעות שהן בתוך האופק.
רק הפרעות שהן super-Horizon יכולות לגדול!

מצד שני, עבור סקלות גדולות מאוד $k \rightarrow 0$, קל
לראות שהפתרון הדועך והפתרון הגדל הם:

$$\delta_k \propto t \propto a^2_{(t)} \qquad \delta_k \propto t^{-1} \propto H_{(t)}$$

$\downarrow$

הפרעות גדלות מהר יותר מהיקום

נשים לב: מדובר כאן בהפרעות בצפיפות הקרינה, ובחלקיקים
אולטרה-יחסותיים כמו נויטרינים.
המסה של חומר לא יחסותי, בריונים וחומר אפל הוא זניח
ולא תורם לצפיפות אנרגיה, אבל עלינו להבין איך הוא
מתנהג בתקופה הזו.
כאמור, הבריונים מיוננים לגמרי ומהווים פלזמה, שמפזרת
פוטונים מאוד ביעילות. למעשה, בגלל יחס הצפיפויות אולי
יותר נכון לומר שהפוטונים מפזרים את האלקטרונים.
בכל מקרה, הם מאולצים לנוע באותה מהירות V.
ע"י השוואת משוואות הרצף שרשמנו לקרינה לזו שרשמנו
לחומר, נגלה ש: $\boxed{\delta_{bar} = \frac{3}{4}\delta_{rad}}$, כלומר
בתקופה זו גם $\boxed{\delta_{bar} \propto t}$

מה לגבי החומר האפל? החומר האפל לא מגיב עם
הפוטונים, ולכן הוא לא מחוייב לנוע באותה V. אבל,
ניתן לשייך לחומר האפל מהירות רנדומלית σ
שקשורה בצפיפות האנרגיה הגרביטציונית שהחומר מרגיש.
נצפה שהפרעות על סקלות קטנות מ- $\sigma \cdot t$

לא יוכלו לגדול (סקלת ג'ינס). מספיק מוקדם, כשהצפיפות גדולה, מתקבל $c \sim \sigma$, ואין גידול של הפרעות שקטנות מהאופק, כמו עבור הקרינה והבריונים.

כשהיקום מתפשט, ρ יורד ולכן גם σ יורד, ובסוף החומר נהיה לא יחסותי. הזמן שבו החומר נהיה לא יחסותי קשור במסה שלו (מסות כבדות יותר נהיות לא יחסותיות מוקדם יותר) וזה בעצם קובע את הגודל המינימלי של מבנים שיכולים להיווצר ביקום, כי עד אותו רגע, בעצם פלוקטואציות לא גדלות.

התצפיות מראות שיש מבנים קטנים (גלקסיות ננסיות)

ולכן ש: $M_{WIMP} \gtrsim 1\,keV \Rightarrow$ Cold Dark Matter

חלקיקים כאלה נהיים לא יחסותיים בערך ב $z \gtrsim 5\times10^{6}$

בזמן הרקומבינציה, מתקבל עבורם $\sigma \lesssim 50 \frac{km}{sec}$

The Transfer Function

$$T^2(k) \equiv \frac{\langle \delta_k^2 \rangle_{z=0}}{\langle \delta_k^2 \rangle_{z=\infty}} \Bigg/ \frac{\langle \delta_0^2 \rangle_{z=0}}{\langle \delta_0^2 \rangle_{z=\infty}}$$

כלומר, כמה גדל פלוקטואציה עם מספר גל k מהמפץ הגדול ועד היום, לעומת פלוקטואציה עם $k=0$ $(z\to\infty)$?

לפי ההגדרה, $T(0)=1$.

הצלחנו לפתור אנליטית די בקלות איך נראה δ_0 עבור מקרים פשוטים: $\Omega_\Lambda=1$ או $\Omega_m=1$ או $\Omega_r=1$.

ניתן יחסית בקלות לקבל ביטוי כללי לכל מודל קוסמולוגי וזאת זה תרגיל בית.

אבל, לפתור עבור k כללי זה קשה, ולכן $T(k)$ הוא שימושי!

אנליזה נומרית מורכבת מראה ש:

$$T(k) = \frac{\ln(1+2.34q)}{2.34q\left[1+3.89q+(16.1q)^2+(5.46q)^3+(6.71q)^4\right]^{1/4}}$$

$$q \equiv \frac{2.04k}{\Omega_{m0} h_7^2 \, Mpc^{-1}}$$

<u>זה ממש מעצבן!</u>

אבל, ניתן להבין את ההתנהגות האיכותית של T בגבולות $k \to 0$ $k \to \infty$ מאוד בקלות.

כשהיקום נשלט קרינה, פלוקטואציות גדלות כמו $\delta \propto t$

$\boxed{\lambda_{(t)} = a \cdot \frac{2\pi}{k} \gtrsim ct}$ כל עוד אורך הגל גדול מהאופק

ברגע שהפלוקטואציה מוכלת באופק, קצב הגידול קטן בהרבה ואפקטיבית $\delta \to const$ (Freeze Out)

- פלוקטואציות בקרינה לא גדלות, כי $\lambda_J < \lambda$
- " באריונים " גדלות, כי הם צמודים לקרינה.
- " בחומר האפל <u>גם</u> לא גדלות אבל מסיבה אחרת.

הזמן האופייני לקריסה, הוא $t_{dyn} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho_m}}$

זה ארוך בהרבה מהזמן האופייני להתפשטות

היקום: $\boxed{t_{exp} \sim \frac{a}{\dot{a}} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho_\gamma}} \ll t_{dyn}}$

$$H^{-1} \sim (G\rho_c)^{-1} \sim (G\rho_\gamma)^{-1}$$

הקרינה לא קורסת ולכן $\rho_\gamma \sim \rho_m$ צפיפות ממוצעת ולא תשפיע.

בסופו של דבר, ב-redshift $z_{\gamma m} \approx 3100$, היקום נהיה נשלט חומר, ובשלב הזה גם ההפרעות בתוך האופק גדלות כמו $\delta \propto t^{2/3}$.

זה <u>רק</u> בחומר האפל, כי הבריונים עדיין מצומדים לקרינה, עד לרקומבינציה ב- $z_{rec} \approx 1,100$.

במאמר מוסגר נציין שהרקומבינציה לא התרחשה בבת אחת, היתה תקופה שבה רוב הבריונים עדיין נעו עם הפוטונים, אבל המהלך החופשי של הפוטונים ארוך מאוד, מה שאפקטיבית יוצר צמיגות והולכה תרמית יעילה בנוזל של הפוטונים+בריונים. צמיגות זו מוחקת הפרעות על סקלות שקטנות מהאופק. הפרעות כאלו הם גלי קול משוככים, ומסתבר שהם נעלמים מאוד מהר.

לתופעה הזו קוראים Silk Damping (1968)

ולכן מרגע שללא חומר אפל, לא היינו יכולים לקבל מבנים קטנים מ- $\approx 10_{Mpc}$, כי המבנה היה מתחיל להיבנות רק ב- $z \lesssim 1000$.

רק, החומר האפל מתחיל לקרוס כבר ב- $z \sim 3000$ ואז הבריונים מצטרפים אח"כ.

<u>חזרה ל $T(k)$</u> $X_{rm} = X(t_{rm})$ זה ה co-moving horizon

כשהחומר והקרינה משתווים.

ראינו כבר ש: $t_{rm} \simeq 6\times 10^{4}\,yr$ $X_{rm} \simeq 125_{Mpc}$

- פלוקטואציות שעבורן $\lambda_0 = 2\pi/k > X_{rm}$ גדלות כמו t עבור $t < t_{rm}$ וכמו $t^{2/3}$ עבור $t > t_{rm}$ ועבורן $T(k) \sim 1$

- פלוקטואציות עם אורך גל קצר יותר, נכנסות לתוך האופק בזמן $t_h < t_{rm}$ כלשהו, ולכן הגדילה שלהם קטנה יותר בפקטור של $\boxed{\frac{t_h}{t_{rm}}}$

מכיוון שלפי ההגדרה, $kX_h(t_h) \sim 1$

ומתקיים: $X_h \propto t^{1/2}$ נקבל הנמכה בגדילה בפקטור

$$\boxed{\frac{t_h}{t_{rm}} \sim \left(\frac{X_h}{X_{rm}}\right)^2 \sim \frac{1}{(kX_{rm})^2}}$$

כך שנקבל:

$$T(k) \approx \begin{cases} 1 & k\chi_{rm} \lesssim 1 \\ (k\chi_{rm})^{-2} & k\chi_{rm} \gtrsim 1 \end{cases}$$

וקל לוודא שהתנהגות זו מתאימה להתאמה הנצפית.

אם נזכר ב Power Spectrum $P(k) \propto \langle|\delta_k|^2\rangle$

אז קל להבין ש:

$$\boxed{P(k) \propto T^2(k)\cdot P_{prim}(k)}$$

כאשר $P_{prim}(k)$ ניתן ע"י אינפלציה, והראנו

מארגומנטים פשוטים שזה הספק Harrison-Zel'dovich

$P(k) \propto k$.

כמובן שהביטוי הנ"ל ל- $P(k)$ נכון רק אם הכל נשאר לינארי. ברגע שיש אפקטים לא לינאריים, כמו היווצרות הילות חומר אפל שראינו בשיעור ובתרגיל בית, אז צריכים תיאוריות משוכללות יותר.