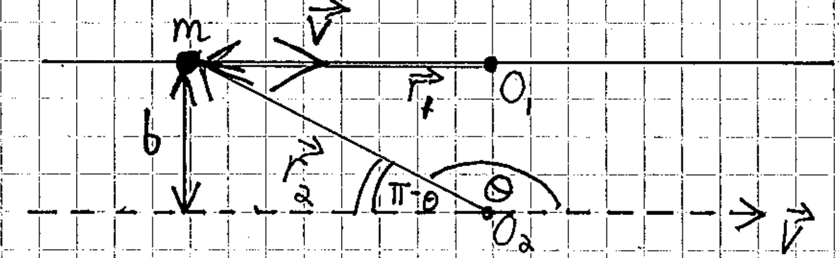
III תנע זוויתי

התנע הזוויתי של גוף עם מסה m, שנמצא בנקודה $\vec r$
ונע במהירות $\vec v$ מוגדר להיות: $\boxed{\vec L = m\cdot\vec r\times\vec v}$

היחידות של $\vec L$: $[L] = \frac{gr\cdot cm^2}{sec} = erg\cdot sec$

- שימו לב כי התנע הזוויתי $\vec L$ ניצב לוקטורים $\vec r$, $\vec v$ כי הוא מוגדר ע"י מכפלה וקטורית שלהם.
- עוד שימו לב שאם הגוף נע בתנועה רדיאלית, דהיינו $\vec r \parallel \vec v$, אז התנע הזוויתי (תנ"ז) שלו מתאפס.
- התנ"ז של גוף תלוי בראשית הצירים. לדוגמא:



במערכת שבה הראשית בנקודה O_1, התנ"ז: $\vec L_1 = m\vec r_1\times\vec v = 0$
כי במערכת זו $\vec r_1 \parallel \vec v$.

לעומת זאת, במערכת O_2: $\vec L_2 = m\vec r_2\times\vec v = m r_2 v\sin\theta\,\hat n$
כאשר $\hat n$ וקטור יחידה שנכנס לתוך הדף. מובן ש $\vec L_1 \neq \vec L_2$!

(שימו לב שזה שונה מהתנע הקווי של החלקיק $\vec p = m\vec v$
שהיה בלתי תלוי בראשית הצירים, כל עוד היא נייחת ביחס לגוף.)

בדוגמא למעלה, האם $\vec L$ משתנה בזמן?

- $\vec L_1 = 0$ תמיד, כי תמיד מתקיים $\vec v \parallel \vec r_1$.
- $\vec L_2 = m r_2 \sin\theta\cdot v\cdot\hat n = m r_2 \sin(\pi-\theta)\cdot v\cdot\hat n = m b v\cdot\hat n$

כאשר b הינו המרחק האנכי של החלקיק מהראשית (ראו איור). גודל זה קבוע בזמן, ולכן רואים שהתנ"ז לא משתנה!

מתי תנ"ז קבוע ומתי הוא משתנה?

$$\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v} = \vec{r}\times(m\vec{v}) = \vec{r}\times\vec{P}$$

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}}\times\vec{P} + \vec{r}\times\dot{\vec{P}} = \vec{v}\times m\vec{v} + \vec{r}\times\vec{F}_{ext} = \vec{r}\times\vec{F}_{ext} \equiv \vec{N}_{ext}$$

לסיכום:

$$\vec{N}_{ext} \equiv \vec{r}\times\vec{F}_{ext} = \dot{\vec{L}}$$

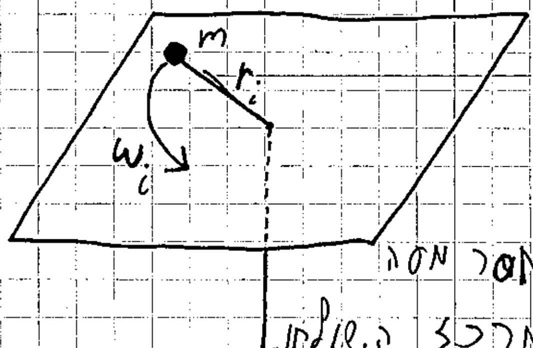
קוראים <u>למומנט</u> (באנגלית Torque) הפיתול של הגוף.

בהמשך נראה אנלוגיה בין תנע קווי וכוח בתנועה בקו ישר לבין תנ"ז ומומנט בתנועה סיבובית.

<u>אז מתי $\vec{L}=const$?</u> $\dot{\vec{L}}=0 \iff \vec{r}\times\vec{F}_{ext}=0$

<u>יש 2 מקרים:</u> (1) $\vec{F}_{ext}=0$, כלומר אין כוחות חיצוניים על המערכת, המערכת היא סגורה, ולכן יש שימור תנע ותנע זוויתי.

(2) $\vec{r} \parallel \vec{F}$, כלומר הכוח הוא <u>רדיאלי</u>.



<u>דוגמא:</u>
על שולחן חסר חיכוך מונחת מסה m.
המסה קשורה לחוט חסר מסה המושחל דרך חור במרכז השולחן.
המסה מסתובבת סביב מרכז השולחן (ע"י החוט) במסלול מעגלי ברדיוס r_i עם תדירות ω_i!
מושכים את החוט דרך החור, כך שהרדיוס מסתובב קטן ל- $r_f = \frac{1}{2} r_i$.

(א) מהי התדירות בסוף ω_f?

(ב) מהי העבודה שביצע כוח המתיחות במהלך התהליך?

פתרון:

(ג) הכוח ששינה את מסלול הגוף הוא רדיאלי, ולכן התנע" לא משתנה.

אם נגדיר את כיוון $\hat{z}$ להיות ניצב לשולחן כלפי מעלה, נקבל שמהירות הגוף (הגוף היא משיקית - תנועה מעגלית) היא:

$$\vec{v} = \omega \cdot r\hat{\varphi} \Longrightarrow \vec{r}\times\vec{v} = (r\hat{r})\times(\omega r\hat{\varphi}) = \omega r^2(\hat{r}\times\hat{\varphi})$$

$$= \omega r^2 \hat{z}$$

מתכונות בסיס ש: $\hat{r}\times\hat{\varphi} = \hat{z}$

$$\Downarrow$$

$$\vec{L} = \omega r^2 \hat{z}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_i r_i^2 \hat{z} = \vec{L}_i = \vec{L}_f = \omega_f r_f^2 \hat{z} = \omega_f\left(\frac{r_i}{2}\right)^2 \hat{z} = \frac{\omega_f}{4} r_i^2 \hat{z}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega_f = 4\omega_i}$$

הגוף מסתובב יותר מהר בסוף.

(ב) הכוח היחיד שפועל על הגוף הוא $\underbrace{\text{המתיחות}}_{\text{(הגרביטציה והנורמל מתבטלים)}}$ לכן השינוי באנרגיה הקינטית של הגוף הוא העבודה שביצעה המתיחות:

$$W_T = \Delta E_k = E_k^{(f)} - E_k^{(i)} = \frac{m}{2}\left(V_f^2 - V_i^2\right) = \frac{m}{2}\left((\omega_f r_f)^2 - (\omega_i r_i)^2\right)$$

$$= \frac{m}{2}\left(\left(4\omega_i \cdot \frac{r_i}{2}\right)^2 - (\omega_i r_i)^2\right) = \frac{m}{2}\left(4\omega_i^2 r_i^2 - \omega_i^2 r_i^2\right) =$$

$$\boxed{W_T = \frac{3}{2} m(\omega_i r_i)^2}$$

תנ"ז של מערכת חלקיקים

כאשר הגדרנו הנושאית זכרים (והגדר"ת מומנטים אותה במרכז המסה של הגוף, אבל נדון יותר על כך בהמשך) נקבל, עבור N חלקיקים עם מסות m_i הנמצאים בנקודות $\vec{r}_i$ והנעים במהירויות $\vec{v}_i$ $(i=1,2,\dots,N)$, התנ"ז הכולל הוא:

$$\vec{L}_{tot}=\sum_{i=1}^{N}L_i=\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i$$

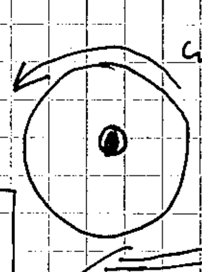
אם מדובר בגוף רציף עם צפיפות מסה $\rho(\vec{r})$, מקבלים (כמו תמיד, וראו גם תרגיל בית 9):

$$\vec{L}=\iiint\rho(\vec{r})\cdot\vec{r}\times\vec{v}\,d^3r$$

כאשר d^3r הוא אלמנט נפח ($dxdydz$ או $rdrd\varphi dz$ או $r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$) והאינטגרל הוא על נפח הגוף (איפה שהצפיפות $\rho(\vec{r})\neq 0$).

דוגמא:

דיסקה הומוגנית ברדיוס R (ומסה M) ומסתובבת סביב צירה בתדירות זוויתית ω.



מהירות הסיבוב ברדיוס r: $\vec{v}=\omega r\hat{\varphi}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{r}\times\vec{v}=\omega r^2(\hat{r}\times\hat{\varphi})}$

הדיסקה הומוגנית ולכן צפיפות המסה שלה $\sigma(\vec{r})=\frac{M}{\pi R^2}$

$$\Downarrow$$

$$\vec{L}=\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{M}{\pi R^2}(\vec{r}\times\vec{v})\cdot rdrd\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{M}{\pi R^2}\cdot\omega r^2\cdot\hat{z}\cdot rdrd\varphi=$$

$$=\frac{M\omega}{\pi R^2}\cdot\frac{R^4}{4}\cdot 2\pi\hat{z}=\boxed{\frac{MR^2}{2}\omega\hat{z}=\vec{L}}$$