חשמל אנליטי - תרגול 2

- משוואות פואסון לפוטנציאל
- פונקצ"ית גרין.

(I) בהרצאה ראינו שחוק גאוס מיתרגם באלקטרוסטטיקה למשוואת פואסון עבור הפוטנציאל האלקטרוסטטי:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \Rightarrow \boxed{\nabla^2\phi = -4\pi\rho}$$

זה נותן לנו קשר בין הפוטנציאל החשמלי לצפיפות המטען לפי:

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')d^3r'}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|}}$$

בשבוע שעבר ראינו איך להשתמש בנוסחה הזו כדי למצוא את הפוטנציאל מהתפלגות מטען ידועה.
כעת נפתור את הבעיה ההפוכה ונשחזר את התפלגות המטען מתוך הפוטנציאל:

תרגיל (Jackson 1.5) הפוטנציאל הממוצע שנובע מאטום המימן הוא:

$$\phi(\vec{r}) = \phi(r) = q\cdot\frac{e^{-\alpha r}}{r}\left(1+\frac{\alpha r}{2}\right)$$

כאשר q הוא מטען הגרעין ו- $\frac{1}{\alpha} = \frac{a_0}{2}$ כאשר a_0 הוא רדיוס בוהר.

מצאו את התפלגות המטען הקלאסית של אטום המימן.

פתרון: נרשום את הלפלסיאן בקורדינטות כדוריות (לפי Google)

$$\boxed{\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \frac{1}{(r\sin\theta)^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}}$$

כמובן שאצלנו שני האיברים הימניים (הזוויתיים) מתאפסים.
כך נקבל לכל $r>0$:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(q\frac{e^{-\alpha r}}{r}\left(1+\frac{\alpha r}{2}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{q}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(-\frac{\alpha e^{-\alpha r}}{r}\left(1+\frac{\alpha r}{2}\right) - \frac{e^{-\alpha r}}{r^2}\left(1+\frac{\alpha r}{2}\right) + \frac{\alpha}{2}\frac{e^{-\alpha r}}{r}\right)\right] =$$

$$\nabla^2\phi = +\frac{q}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(-\frac{\alpha e^{-\alpha r}}{r} - \frac{\alpha^2 e^{-\alpha r}}{2} - \frac{e^{-\alpha r}}{r^2} - \cancel{\frac{\alpha e^{-\alpha r}}{2r}} + \cancel{\frac{\alpha e^{-\alpha r}}{2r}}\right)\right]$$

$$= -\frac{q}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[e^{-\alpha r}\left(1+\alpha r+\frac{\alpha^2 r^2}{2}\right)\right] =$$

$$= -\frac{q}{r^2}\left[-\alpha\left(\cancel{1}+\cancel{\alpha r}+\frac{\alpha^2 r^2}{2}\right)e^{-\alpha r} + \left(\cancel{\alpha}+\cancel{\alpha^2 r}\right)e^{-\alpha r}\right] =$$

$$\boxed{\nabla^2\phi = +\frac{q\alpha^3}{2}e^{-\alpha r}}$$

אבל, התוצאה זו לא מלאה, כי הביטוי שהשתמשנו בו ל- $\nabla^2\phi$ תקף רק ב- $r>0$, ואילו ϕ שלנו מתבדר בראשית:

$$\phi(r) = q\frac{e^{-\alpha r}}{r}\left(1+\frac{\alpha r}{2}\right) \xrightarrow[r\to 0]{} \frac{q}{r}(1-\alpha r) = \frac{q}{r} + O(1)$$

לכן, ל- ϕ יש תרומה ממטען נקודתי q בראשית.
זה ייתן לנו תוספת לביטוי של $\nabla^2\phi$ שהוא:

$$\boxed{\nabla^2\left(\frac{q}{r}\right) = -4\pi q\,\delta^{(3)}(\vec r)}$$

סה"כ נקבל:

$$\nabla^2\phi = \frac{q\alpha^3}{2}e^{-\alpha r} - 4\pi q\,\delta^{(3)}(\vec r) = -4\pi\rho(r)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\rho(r) = q\left(\delta^{(3)}(\vec r) - \frac{\alpha^3}{8\pi}e^{-\alpha r}\right)} = qe^{-\alpha r}\left(\delta^{(3)}(\vec r) - \frac{\alpha^3}{8\pi}\right)$$

קל לפרש תוצאה זו פיזיקלית.
צפיפות המטען מורכבת ממטען נקודתי q בראשית, וסביבו ענן של צפיפות מטען שלילית הממסך את המטען הנקודתי.
ענן זה קיים על סקלה של $\frac{1}{\alpha} = \frac{a_0}{2}$ כלומר בערך על סקלת רדיוס האטום.

(II) בבחינה ראינו שכדי לפתור את משוואת פואסון בנפח V עם תנאי שפה נתונים, ניתן להשתמש בפונקציית גרין: $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ שמקיימת:

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}\,') = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,') \\ G(\vec{r},\vec{r}\,')\big|_{\text{על השפה}} = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{פותרת משוואת פואסון בנפח עבור מטען נקודתי הנמצא בנקודה } \vec{r}\,' \;\; G(\vec{r},\vec{r}\,')}$

וכעת:

$$\phi(\vec{r}) = \underbrace{\int \rho(\vec{r}\,')\, G(\vec{r},\vec{r}\,')\, d^3r'}_{\text{קונבולוציה של צפיפות המטען עם פונקציית גרין}} - \underbrace{\frac{1}{4\pi}\oint \phi(\vec{r}\,') \frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'}\, da'}_{\text{איבר שפה}}$$

קונבולוציה של צפיפות המטען עם פונקציית גרין ← הצפיפות כסופרפוזיציה של פונקציות δ (מטענים נקודתיים)

איבר שפה. $\frac{\partial G}{\partial n'}$ נגזרת בכיוון הנורמל לשפה.

כתבנו את איבר השפה עבור תנאי שפה דיריכלה (ϕ נתון על השפה). עבור תנאי שפה נוימן ($\frac{\partial\phi}{\partial n}$ נתון על השפה) מתקבל ביטוי מעט שונה, אך לא מהותית.

נדגים זאת בשאלה הבאה העוסקת במישור האינסופי המוארק מהתרגול הקודם.

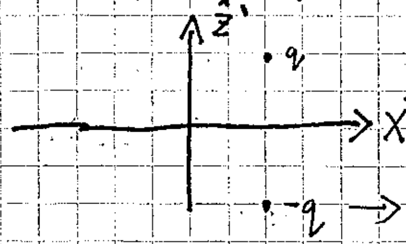
<u>שאלה:</u> לוח אינסופי מוליך נמצא במישור $z=0$. הפוטנציאל על הלוח (מישור XY) הוא אפס, פרט לעיגול ברדיוס a סביב הראשית, ושם הפוטנציאל הוא קבוע ϕ_0:

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \phi(r,\varphi,z=0) = \begin{cases} \phi_0 & r<a \\ 0 & r>a \end{cases} = \phi_0\cdot\Theta(a-r)}$$

מהו הפוטנציאל בתחום $z>0$?

<u>פתרון:</u> בתחום $z>0$ אין מטענים $\Leftarrow$ $\rho(\vec{r}\,')=0$ ולכן האיבר הראשון בביטוי למעלה לפוטנציאל מתאפס. נשארנו רק עם איבר השפה. תחילה עלינו למצוא את פונקציית גרין.

פונקציית גרין עם הפוטנציאל המתקבל ממישור
מוארך ב- $z=0$ ומטען נקודתי $q=1$ הנמצא בנק' $\vec{r}'=(x',y',z')$
כך: $\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')$



מטען דמות

$$G(\vec{r},\vec{r}'|_{\text{שפה}}) = 0$$

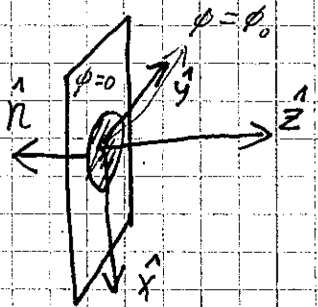
ראינו בשבוע שעבר שהפתרון לבעיה הזו הוא בהצבת מטען דמות $q=-1$ בצד השני של הלוח, בנק' $(x',y',-z')$.

לכן:
$$\boxed{G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2]^{\frac{1}{2}}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial G}{\partial \hat{n}'}\right|_{\text{על השפה}}} = \ominus \left.\frac{\partial G}{\partial z'}\right|_{z'=0} = \ldots = \boxed{\frac{-2z}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}}$$

$\hat{n}'$ וקטור החוצה מהנפח
כלומר הוא מכוון בכיוון $(-\hat{z}')$



נרשום זאת בקורדינטות פולאריות על השפה:
$$\vec{r} = (x,y,z) \rightarrow (r,\varphi,z), \quad \vec{r}'=(x',y',z'=0) \rightarrow (r',\varphi',z'=0)$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \hat{n}}\right|_{z'=0} = \frac{-2z}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{-2z}{[r^2+r'^2-2rr'\cos(\varphi-\varphi')+z^2]^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \phi(r,\varphi,z) = -\frac{1}{4\pi}\oint \phi(\vec{r}')\cdot\frac{\partial G}{\partial \hat{n}'}da' =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\phi_0\cdot\frac{2z\, r'dr'd\varphi'}{[r^2+r'^2-2rr'\cos(\varphi-\varphi')+z^2]^{3/2}}$$

$$\boxed{\phi(r,\varphi,z) = \frac{\phi_0 z}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^{a}r'dr'\frac{1}{[r^2+(r')^2-2rr'\cos(\varphi-\varphi')+z^2]^{3/2}}}$$

זהו אינטגרל מסובך שניתן לפתור אותו נומרית, אם ממש רוצים.

ניתן לקבל ביטוי אנליטי לפוטנציאל לאורך ציר z,

שים $r=0,\ \varphi=0 \Leftarrow$

$$\phi(0,0,z)=\frac{\phi_0 z}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{r'\,dr'\,d\varphi'}{\left[(r')^2+z^2\right]^{3/2}}=$$

$$=\phi_0 z\int_0^{a}\frac{r'\,dr'}{\left((r')^2+z^2\right)^{3/2}}=\phi_0\int_0^{a/z}\frac{x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}=-\phi_0\cdot\left.\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right|_0^{a/z}=$$

$$\boxed{=\phi_0\left(1-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)=\phi(0,0,z)}\Longrightarrow\boxed{\phi(z=0)=\phi_0\quad \text{כנדרש לפי תנאי השפה}}$$

בגבול $z\gg a$ מקבלים:

$$\boxed{\phi(0,0,z\gg a)}\doteq\phi_0\left[1-\frac{1}{\left[1+\left(\frac{a}{z}\right)^2\right]^{1/2}}\right]\simeq\phi_0\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{z^2}\right)\right]=\boxed{\frac{\phi_0 a^2}{2z^2}}$$

נשים לב שהפוטנציאל דועך כמו $\frac{1}{z^2}$ (כמו $\frac{1}{r^2}$) ולא כמו $\frac{1}{r}$ $\Leftarrow$ פוטנציאל של דיפול, ולא של מונופול.

$$-\frac{q\alpha^3}{4}\int_{-1}^{+1}\int_0^{\infty}\frac{r'^2 e^{-\alpha r'}\,dr'\,d\mu}{[r^2+r'^2-2rr'\mu]^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2}\frac{\alpha^3}{2}\int r'^2 e^{-\alpha r'}[r^2+r'^2-2rr'\mu]^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{+1} dr'$$

$r'>r$ $\quad r-r'<0 \quad (r'-r)-(r+r')$

$$-\frac{q\alpha^3}{2}\int_0^{\infty} r'^2 e^{-\alpha r'}\left(|r-r'|-(r+r')\right)dr'$$

$r'<r$ $\quad r-r'>0 \quad |r-r'|-(r+r') = -r-r'+r-r' = -2r'$ $\quad -2r$

$$-\frac{q\alpha^3}{2}\left[\int_0^{r}-2(r')^3 e^{-\alpha r'}dr' + \int_r^{\infty}-2r(r')^2 e^{-\alpha r'}dr'\right]$$

$$q\alpha^3\left[\frac{1}{\alpha^4}\int_0^{\alpha r}x^3e^{-x}dx + \frac{r}{\alpha^3}\int_{\alpha r}^{\infty}x^2e^{-x}dx\right]$$

$\int_a^b uv' = uv\big|_a^b - \int_a^b u'v$ $\quad u=x^3 \quad v'=e^{-x}$ $\quad u'=3x^2 \quad v=-e^{-x}$

$$\boxed{\phi = \frac{q}{\alpha}\int_0^{\alpha r}x^3e^{-x}dx + qr\int_{\alpha r}^{\infty}x^2e^{-x}dx}$$

$$\int_0^{\alpha r}x^3e^{-x} = -x^3e^{-x}\Big|_0^{\alpha r} + 3\int_0^{\alpha r}x^2e^{-x}dx = -(\alpha r)^3e^{-\alpha r} - 3x^2e^{-x}\Big|_0^{\alpha r} + 6\int_0^{\alpha r}xe^{-x}dx =$$

$u=x^2 \quad v'=e^{-x}$ $\quad u'=2x \quad v=-e^{-x}$ $\quad u=x \quad v'=e^{-x}$ $\quad u'=1 \quad v=-e^{-x}$

$$= -(\alpha r)^3e^{-\alpha r} - 3(\alpha r)^2e^{-\alpha r} - 6\alpha re^{-\alpha r} + 6\int_0^{\alpha r}e^{-x}dx$$

$$= \boxed{-(\alpha r)^3e^{-\alpha r} - 3(\alpha r)^2e^{-\alpha r} - 6(\alpha r)e^{-\alpha r} - 6e^{-\alpha r} + 6}$$

$$\int_{\alpha r}^{\infty}x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x}\Big|_{\alpha r}^{\infty} + 2\int_{\alpha r}^{\infty}xe^{-x}dx = (\alpha r)^2e^{-\alpha r} - 2xe^{-x}\Big|_{\alpha r}^{\infty} + 2\int e^{-x}dx$$

$x^2 \quad e^{-x}$ $\quad 2x \quad -e^{-x}$ $\quad x \quad e^{-x}$ $\quad 1 \quad -e^{-x}$

$$\boxed{(\alpha r)^2e^{-\alpha r} + 2\alpha re^{-\alpha r} + 2e^{-\alpha r}}$$

$$q\left[\frac{6}{\alpha} - \frac{6}{\alpha}e^{-\alpha r} - 6re^{-\alpha r} - 3\alpha r^2e^{-\alpha r} - \cancel{\alpha^2r^3e^{-\alpha r}} + \cancel{\alpha^2r^3e^{-\alpha r}} + 2\alpha r^2e^{-\alpha r} + 2re^{-\alpha r}\right]$$

$$q\left[\frac{6}{\alpha} - \frac{6}{\alpha}e^{-\alpha r} - 4re^{-\alpha r} - \alpha r^2e^{-\alpha r}\right]$$