moodle.huji.ac.il/hu11
Classical Mechanics

ניר מנדלקר
nir.mandelker@mail.huji.ac.il
קפלן 113

שיקולי יחידות

מטרתה של הפיזיקה היא לבטא את חוקי הטבע בעזרת נוסחאות מתמטיות.

אבל, גדלים פיזיקליים אינם פשוט מספרים אלא גדלים בעלי יחידות: מרחק (m, cm, km, L.Y...), זמן (sec, min, Myr,...)
מסה (kg, gr, m_p, ton,...)

על כן, לא ניתן להשוות בין גדלים שלהם יחידות שונות:

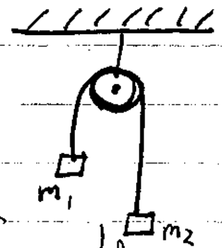
$$2yr \neq 2kg$$

בקורס הזה, שיטת היחידות היא c.g.s (cm, gr, sec)
אבל שיטת יחידות מאוד שימושית נוספת היא m.k.s (m, kg, sec)

חשוב מאוד להיות עקבי ביחידות שבהן משתמשים, כדי למנוע טעויות חמורות כמו התרסקות לוויין על מאדים.

למעשה, שימוש בשיקולי יחידות הוא כלי מאוד חזק בפיזיקה שמאפשר לזהות טעויות כמעט מייד וגם לנחש נוסחאות!

דוגמא 1: נתונות 2 מסות m_1, m_2 המחוברות זו לזו בחבל חסר מסה התלוי על גלגלת חסרת מסה.
נבקש לקבוע מהי התאוצה של המסה m_1 מבין האפשרויות הבאות:



א) $\cancel{\frac{m_1}{m_1+m_2} \cdot g}$ סימטריה (2 התאוצות צמודות בגלל החבל) וגם צריכים תאוצה 0 עבור $m_1=m_2$.

ב) $\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} \cdot g$

ג) $\cancel{\frac{m_1+m_2}{m_1-m_2} \cdot g}$ תאוצה ∞ עבור מסות שוות

ד) $\cancel{m_1^2+m_2^2 \cdot g}$ יחידות של תאוצה!

דוגמא ב: נתונה מסה נקודתית m הנעה על מעגל ברדיוס R
עם מהירות משיקית קבועה V.
מהי תאוצת המסה?

ראשית, כפי שנראה בהמשך הקורס, ברור שיש למסה תאוצה, כי אמנם גודל המהירות שלה קבוע, אך כיוון המהירות משתנה בזמן (כמו באוטו שמסתובב). התאוצה זו קצב שינוי המהירות

הגדלים הפיסיקליים הרלוונטיים בבעיה הם מסה, רדיוס ומהירות.
יחידות של תאוצה: זה יחידות של מהירות חלקי זמן:

$$[a] = \frac{[V]}{[T]} = \frac{cm}{sec^2}$$

ננסה לבנות גודל בעל יחידות כאלו ע"י שימוש ב- V, R, m:

$$a \propto m^{\alpha} V^{\beta} R^{\gamma}$$

$$\Downarrow$$

$$cm \cdot sec^{-2} = gr^{\alpha}\, cm^{\beta} sec^{-\beta} \cdot cm^{\gamma}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad \gamma = -1$$

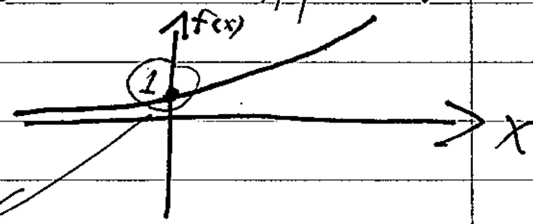
$$\Downarrow$$

$$\boxed{a \propto \frac{V^2}{R}}$$

וזו התשובה הנכונה!

פונקציות מעריכיות, לוגריתמים ופונק' טריגונומטריות

עבור קבוע חיובי $a > 0$ ניתן להגדיר פונק' $f(x) = a^x$



$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$a^x b^x = (a \cdot b)^x$

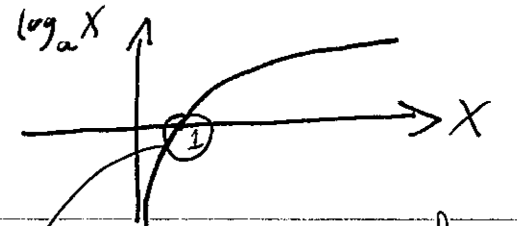
$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

חוקי חזקות:

$a^0 = 1$

$a^1 = a$



הפונק' ההפכה לפונק' המעריכית היא הלוגריתם:

$$\log_a x = b \iff a^b = x$$

בסיס הלוגריתם

חוקי לוגריתם:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a x + \log_a y = \log_a x \cdot y$$

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

המספר של אוילר: $e = 2.71...$ נקרא הבסיס הטבעי, בגלל מספר תכונות שלו שנראה בהמשך.

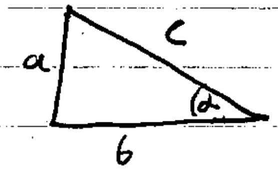
מסמנים: $\log_e x = \ln x$

פונק' הפוכות:
arcsin
arccos
arctg

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

$$tg(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$$



טריג:

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi k)$$

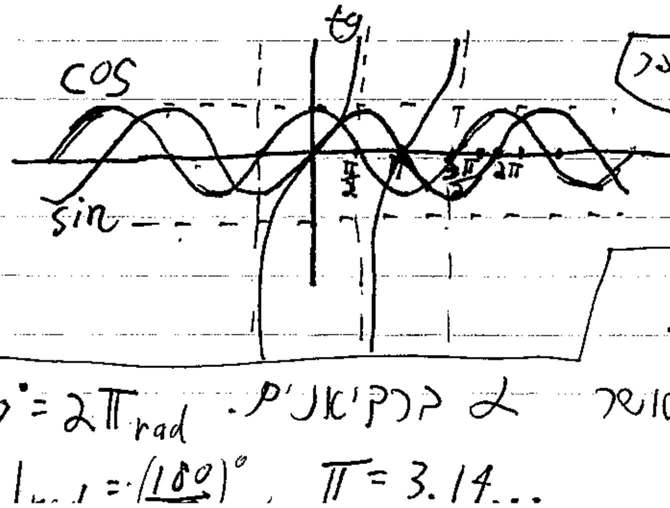
$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi k)$$

עם k שלם.

פונק' מחזורית עם מחזור של 2π

$$\sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$



פונק' מקבלת מספר חסר יחידות

אין מעלות!

רדיאן הוא גודל חסר יחידות.

אורך הקשת: $l = R \cdot \alpha$ כאשר α ברדיאנים. $360^\circ = 2\pi_{rad}$

$1_{rad} = (180)^\circ$, $\pi = 3.14...$

נגזרות

נגזרת של פונקציה זו קצב השינוי של אותה הפונקציה.

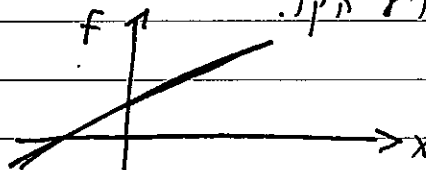
למשל, אם אני מתבונן בתנועה חד מימדית של גוף לאורך ציר X כתלות בזמן, הפונק' תהיה $X(t)$ והנגזרת תהיה קצב השינוי של המקום בזמן, קה"ע המהירות $V(t)=\frac{dx}{dt}=\dot{X}(t)$

באופן כללי מסמנים $f'(x)=\frac{df}{dx}$.

אבל איך מחשבים קצב שינוי של פונקציה?

עבור פונק' לינארית (קו ישר) חישוב קצב השינוי של הפונקציה זה קל: זה פשוט שיפוע הקו:

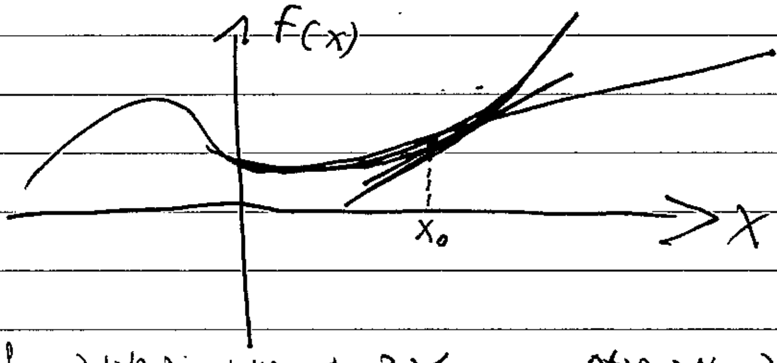
$f(x)=ax+b$



במקרה הזה, הקצב שבו הפונק' f משתנה עם המשתנה x הוא פשוט השיפוע: a

$$\boxed{f'(x)=a=const}$$

מה עושים עבור פונקציה לא לינארית?



הנגזרת של הפונק' f בנק' x_0 יהיה השיפוע של המשיק לפונק' בנקודה!

איך מחשבים את זה? נתבונן בשיפוע של הקו שמחבר בין הנקודות $(x_0,f(x_0))$, $(x_0+h,f(x_0+h))$ כאשר $h>0$ הוא מספר חיובי מאוד קטן. שנסמן [illegible]

שיפוע הקו הנ"ל הוא: $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

בגבול שבו $h\to 0$ אנחנו מחשבים בעצם את השיפוע של המשיק לפונק' בנקודה, ולכן:

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

לדוגמא: (א)

$f(x) = ax + b$

$\Downarrow$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(a(\cancel{x}+h) + \cancel{b}) - (\cancel{ax} + \cancel{b})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a$$

(ב)

$f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

מההגדרה, קל לקבל את החוקים הבאים:

$(f+g)' = f' + g'$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

כלל השרשרת:

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \longleftrightarrow \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

לדוגמא:

$f(x) = (3x^6 + 9)^{12} \Longrightarrow g(x) = 3x^6 + 9$

$f(x) = f(g(x)) = g^{12}(x)$

$\Downarrow$

$f(g) = g^{12}$

$f'(g) = 12 g^{11}$

$g'(x) = 18x^5$

נגזרת פנימית

$\longrightarrow f'(x) = 12(3x^6 + 9)^{11} \cdot 18x^5$

כללי גזירה בסיסיים.

$$\boxed{\begin{aligned} &(x^n)' = n x^{n-1} \\ &(const)' = 0 \\ &\sin'(x) = \cos(x) \\ &\cos'(x) = -\sin(x) \\ &(a^x)' = a^x \cdot \ln(a) \\ &(e^x)' = e^x \end{aligned}}$$

$\longrightarrow x = e^{\ln(x)} \Big/ \frac{d}{dx} \longrightarrow 1 = e^{\ln(x)} \cdot \ln'(x) = x \cdot \ln'(x)$

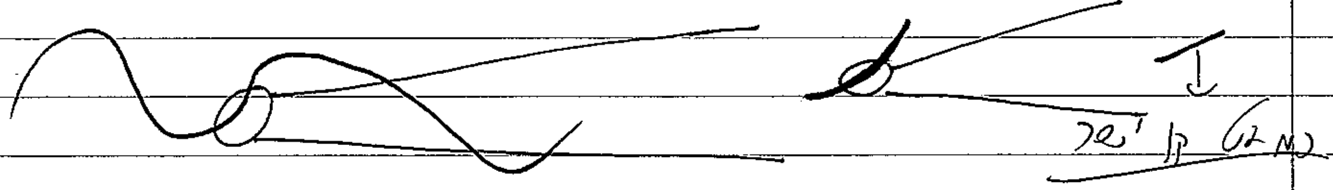
$\Downarrow$

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

$$(x^x)' = \left(e^{\ln x^x}\right)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' =$$

$$= \boxed{x^x(\ln x + 1)}$$

קירוב לינארי: כשאנו מחשבים נגזרת, אנו מחשבים את קצב השינוי של הפונק' בנק'. למעשה, אנחנו עושים זאת ע"י כך שאנחנו מקרבים את הפונק' לקו ישר בסביבה מספיק קטנה סביב הנקודה.



כמה "הסביבה" הזו קטנה? תלוי בפונקציה!

הקו הישר הזה עובר בנקודה $(x_0, f(x_0))$ ויש לו שיפוע $f'(x_0)$.
המשוואה שמתארת קו ישר כזה הינה:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

כלומר, בסביבה מספיק קטנה סביב הנק' x_0, ניתן לבצע קירוב לינארי לפונקציה ע"י:

$$\boxed{f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}$$

דוגמאות: סביב $x_0 = 0$:

I $\sin(0)=0$, $\sin'(0)=\cos(0)=1$

$\sin(x) \simeq 0 + 1\cdot x = x \longrightarrow$ רק ברדיאנים!

II $\cos(0)=1$ $\cos'(0)=-\sin(0)=0$

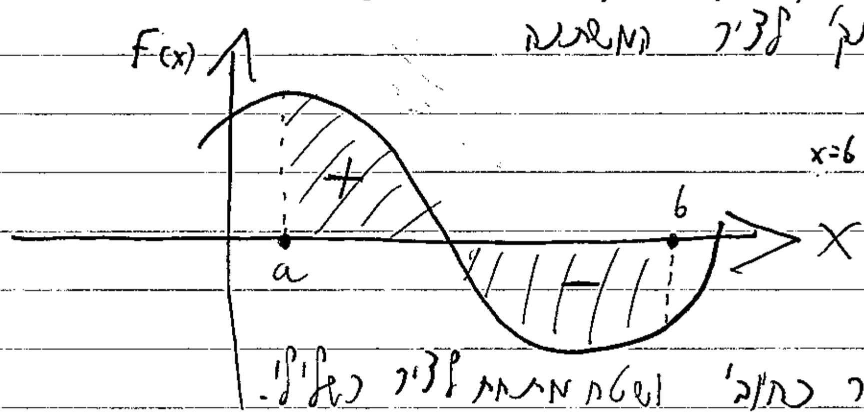
$\cos(x) \simeq 1 + 0\cdot x = 1 \longrightarrow$ ישר עם שיפוע 0

III $e^0=1$, $e^{0'}=e^0=1$

$e^x \simeq 1+1\cdot(x-0) = 1+x$

אינטגרלים

המוטיבציה שלנו כשדיברנו על נגזרת הייתה למצוא את קצב השינוי של פונק' בנק' מסויימת.
כשנדבר על אינטגרלים, המוטיבציה העיקרית תהיה חישוב השטח הכלוא בין גרף הפונק' לציר המשתנה



$\int_a^b f(x)\,dx \equiv$ שטח בין $x=a$ לבין $x=b$

שטח מעל הציר נספר כחיובי ושטח מתחת לציר כשלילי.

למשל, אם יש לי גרף של מהירות של גוף לאורך ציר x כתלות בזמן: $V(t)$, לשטח מתחת לגרף יהיו יחידות של מהירות כפול זמן, קרי"ש מרחק. שטח זה אכן ייצג את המרחק שעבר הגוף בין זמן התחלתי לזמן סופי.

איך מחשבים את זה? כמו כשדיברנו על נגזרות, גם כאן נשתמש במושג הגבול. נחלק את ציר ה-x בין הנקודות a ו-b להרבה מקטעים, כל אחד ברוחב Δx. נקבל אוסף של נקודות $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$ כאשר $x_{i+1}-x_i=\Delta x$.

כאשר Δx מספיק קטן, נוכל לומר שבמקטע בין x_i לבין x_{i+1}, הפונק' בקירוב קבועה, ושווה ל $f(x_i)$.

והשטח מתחת לגרף הוא סכום השטחים של כל המלבנים:

$$S_{[a,b]}=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_i f(x_i)\cdot\Delta x\equiv\int_a^b f(x)\,dx$$

המשפט היסודי של החדו"א: אם לפונק' $f(x)$ יש פונק' קדומה $F(x)$
כך שמתקיים: $F'(x) = f(x)$ אז:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

"הוכחה": בהינתן פונק' $f(x)$ ונק' x_0, אינטגרל מסוים
נגדיר פונק' $F(x)$ להיות השטח מתחת לגרף של f בין הנק' x_0 לנק' x.

אז' השטח במקטע בין x לבין $(x+h)$ עבור $h \to 0$ קטן הוא פשוט:

$$S_{[x,x+h]} = F(x+h) - F(x) = h \cdot f(x)$$

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x)$$

(המשך ההוכחה בתרגיל)

אינטגרל לא מסוים (בדיעבד) המשפט האחרון, נוכל לקבל על אינטגרל פשוט כפעולה ההפכה של נגזרת:

$$F'(x) = f(x) \Longrightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + c$$

בלי גבולות   קבוע אינטגרציה

דוגמאות:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int 0\,dx = c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sin(x) = -\cos(x)$$

$$\int \cos(x) = \sin(x)$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)\cdot g(x) = \left(f(x)\cdot g(x)\right)' - f(x)g'(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = \int \left(f(x)\cdot g(x)\right)' dx - \int f(x)g'(x)\,dx =$$

$$= f(x)\cdot g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

למשל:

$$\int x\cdot \ln(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + c$$

$$f'(x) = x \quad g(x) = \ln(x)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

החלפת משתנה:

$$\int x e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{-x^2}\cdot 2x\,dx$$

נגדיר $u = x^2$

$$\Downarrow$$

$$du = 2x\,dx \Longleftarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}\int e^{-u}du = -\frac{1}{2}e^{-u} + c = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$