מכניקה קלאסית - תרגול 11

תזכורת הרצאה - אוסילטור מרוסן

מסה m שפועל עליה כוח אלסטי: $F_e=-kx$

וגם כוח גרר $F_d=-b\cdot v=-b\dot{x}$

משוואת התנועה: $ma=F_{tot}$ $\Leftarrow$ $\boxed{m\ddot{x}=-kx-b\dot{x}}$

נגדיר: (1) $\frac{b}{m}=\frac{2}{\tau}$ (τ הוא זמן דעיכה אופייני הנובע מהחיכוך)

(2) $\frac{k}{m}=\omega_0^2$ (ω_0 היא התדירות העצמית של הקפיץ)

ונקבל: $\boxed{\ddot{x}+\frac{2}{\tau}\dot{x}+\omega_0^2x=0}$

משוואה דיפרנציאלית ליניארית (אין איברים מהצורה $\dot{x}^2, x^2, x\dot{x}$ וכו')
הומוגנית (כולל ימין שווה לאפס) ממעלה שנייה.

הפתרון של משוואה כזו הוא: $\boxed{x(t)=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}}$

כאשר: • A_1, A_2 קבועי אינטגרציה שנקבעים לפי תנאי ההתחלה $x(t=0)$, $\dot{x}(t=0)$

• λ_1,λ_2 השורשים של הפולינום האופייני: $\lambda^2+\frac{2}{\tau}\lambda+\omega_0^2=0$

(אם $x(t)=Ae^{\lambda t}$ אז $\dot{x}=\lambda\cdot x$, $\ddot{x}=\lambda^2x$).

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lambda_{1,2}=-\frac{1}{\tau}\pm\sqrt{\frac{1}{\tau^2}-\omega_0^2}}$$

יש שלושה מקרים ספציפיים:

(I) ריסון חזק: $\boxed{\frac{1}{\tau}>\omega_0}$ $\Leftarrow$ קצב התנודות (ω_0) קטן מקצב הדעיכה בעקבות החיכוך ($\frac{1}{\tau}$).

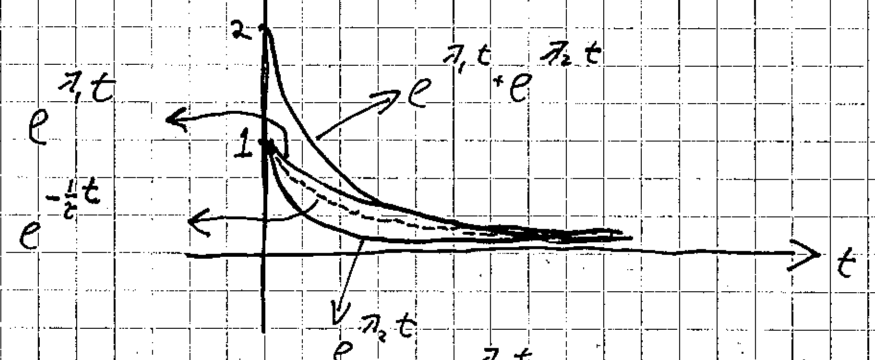
כתוצאה מכך, כל התנועה דועכת לפני שמספיקים לעבור תנודה שלמה אחת.

נסמן: $\boxed{\omega=\sqrt{\frac{1}{\tau^2}-\omega_0^2}}$ ונשים לב ש: $\boxed{\omega<\frac{1}{\tau}}$

$$\lambda_1=-\frac{1}{\tau}+\omega<0,\quad \lambda_2=-\frac{1}{\tau}-\omega<0$$

$$\boxed{x(t)=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}}$$

מכיוון ש $\lambda_1,\lambda_2<0$ שניהם, מקבלים שהתנועה דועכת אקספוננציאלית בזמן. אין בכלל תנודות.



מכיוון ש $|\lambda_2|>|\lambda_1|$ הביטוי $e^{\lambda_2 t}$ דועך הרבה יותר מהר מאשר $e^{\lambda_1 t}$, שכעבור זמן סופי, הפתרון בעצם מתנהג פשוט כמו $e^{\lambda_1 t}$.

עוד נשים לב שקצב הדעיכה במקרה זה הוא איטי יותר מאשר במקרה א $e^{-\frac{1}{\tau}t}$, מכיוון ש: $|\lambda_1|<\frac{1}{\tau}$.

II ריסון קריטי: $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\tau}}$

במקרה זה $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{\tau}$ והפתרון למשוואה הוא (כמו תרגיל בית מספר 10):

$$\boxed{X(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + A_2 t e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

גם כאן אין תנודות והתנועה דועכת אקספוננציאלית.
אבל קצב הדעיכה כאן הוא לפי $e^{-t/\tau}$, כלומר הדעיכה מהירה יותר מאשר בריסון חזק, ששם נשלטת ע"י הביטוי $\boxed{e^{\lambda_1 t}}$ בזמנים ארוכים, שדועך לאט יותר מאשר $\boxed{te^{-t/\tau}}$

III ריסון חלש: $\boxed{\frac{1}{\tau} < \omega_0}$ $\Leftarrow$ קצב הדעיכה איטי יותר מקצב התנודות, ולכן נספיק להשלים מספר מחזורים לפני דעיכת התנועה.

נסמן $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$ ונקבל: $\boxed{\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm i\omega}$

$$\Downarrow$$

$$X(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}\right)$$

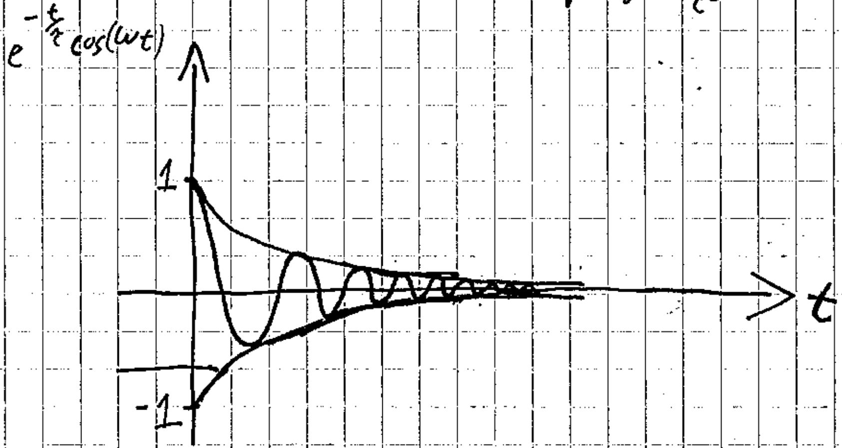
$$\Downarrow$$

$$\boxed{X(t) = A_{mp} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

תנועה הרמונית עם אמפליטודה שדועכת בזמן: $A_{mp}(t) = A_{mp_0} e^{-\frac{t}{\tau}}$
כלומר כעבור זמן τ האמפליטודה דועכת בפקטור $e\,(=2.71...)$.

נשים לב שתדירות האוסילציות היא לא כמו בקפיץ $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

ללא חיכוך, אלא: $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\frac{1}{\tau^2}}$.



שאלה:

נניח $\omega_0 \gg \frac{1}{\tau}$ (ריסון מאוד מאוד חלש). נקבל אם כך דעיכה מאוד מאוד איטית של התנועה המחזורית (איטית ביחס לזמן המחזור).

נניח גם כי $\varphi_0=0$ כלומר $X_{(t)}=A_0e^{-t/\tau}\cos(\omega t)$

חשבו את העבודה שמבצע כוח החיכוך $(F=-b\dot{x})$ ע"ג זמן מחזור אחד, והראו שזה שווה להפסד האנרגיה במשך המחזור הנ"ל.

פתרון:

נזכור: $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\frac{1}{\tau^2}}$.

אצלנו, מכיוון ש: $\omega_0\gg\frac{1}{\tau}$ נקבל כי $\boxed{\omega\approx\omega_0}$

עוד נקבל כי:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}\approx\frac{2\pi}{\omega_0}\ll 2\pi\cdot\tau$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{T}{\tau}\ll 2\pi \Longrightarrow \boxed{\frac{T}{\tau}\ll 1}$$

בעצם ניתן לאמר:

$$\Leftarrow \quad X_{(t)}=A_0e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t)\approx A_0e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{X}_{(t)}=-\frac{A_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_0 t)-A_0\omega_0e^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\omega_0 t)=$$

$$\boxed{\dot{X}_{(t)}=}-A_0e^{-\frac{t}{\tau}}\Big(\underbrace{\frac{1}{\tau}\cos(\omega_0 t)}_{\text{זניח מכיוון ש: }\frac{1}{\tau}\ll\omega_0}+\omega_0\sin(\omega_0 t)\Big)\boxed{\approx -A_0\omega_0e^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\omega_0 t)}$$

$$W=\int_{x(t)}^{x(t+T)}F_d\,dx \underset{t}{\downarrow}= \int_{t}^{t+T}-b\dot{x}\frac{dx}{dt}dt=-b\int_{t}^{t+T}\dot{x}^2dt$$

שינוי משתנה אינטגרציה

נזכור כי $\frac{2}{\tau}=\frac{b}{m} \Leftarrow \boxed{b=\frac{2m}{\tau}}$ ונציב את $\dot{x}$

$$W=-\frac{2m}{\tau}\cdot A_0^2\omega_0^2\int_t^{t+T} e^{-\frac{2t'}{\tau}}\sin^2(\omega_0 t')\,dt'$$

נחליף משתנה $t''=t'-t$ ונקבל:

$$W=-\frac{2mA_0^2\omega_0^2}{\tau}\int_0^T e^{-\frac{2t}{\tau}}\cdot e^{-\frac{2t''}{\tau}}\cdot\sin^2(\omega_0 t''+\omega_0 t)\,dt''$$

תחום האינטגרציה הוא $0\le t''\le T$

קיבלנו ש: $\frac{T}{\tau}\ll 1$ ולכן גם $\frac{t''}{\tau}\ll 1$ ולכן $\boxed{e^{\frac{t''}{\tau}}\approx 1}$

נסמן גם $\varphi_0=\omega_0 t$ קבוע שלא תלוי בכלל ב- t''.

נקבל:

$$W=-\frac{2mA_0^2\omega_0^2}{\tau}\cdot e^{-\frac{2t}{\tau}}\underbrace{\int_0^T\sin^2(\omega_0 t''+\varphi_0)\,dt''}_{=\frac{T}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{W=-mA_0^2\omega_0^2\cdot\frac{T}{\tau}\cdot e^{-\frac{2t}{\tau}}}$$

האנרגיה שאבדה למחזור היא:

$$\Delta E=E(t+T)-E(t)=\frac{1}{2}kA_{(t+T)}^2-\frac{1}{2}kA_{(t)}^2=$$

$$=\frac{1}{2}kA_0^2\left(e^{-\frac{2(t+T)}{\tau}}-e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)=\frac{1}{2}m\omega_0^2A_0^2e^{-\frac{2t}{\tau}}\left(e^{-\frac{2T}{\tau}}-1\right)$$

מכיוון ש: $\frac{T}{\tau}\ll 1$ נקבל לפי טיילור ש: $e^{-\frac{2T}{\tau}}\simeq 1-\frac{2T}{\tau}$

$$\boxed{\Delta E=-mA_0^2\omega_0^2\cdot\frac{T}{\tau}e^{-\frac{2t}{\tau}}=W_{drag}}\Leftarrow$$

כנדרש

אוסילטור מאולץ

נניח אוסילטור הרמוני עם ריסון הנתון תחת כוח חיצוני נוסף, שהוא מחזורי עם תדירות ω_F כלומר הכוח הכולל הוא:

$$m\ddot{x} = ma = F_{tot} = -kx - b\dot{x} + F_0\cos(\omega_F t)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_F t) = Re\left\{\frac{F_0}{m}e^{i\omega_F t}\right\}}$$

יש לנו כאן משוואה דיפרנציאלית מסדר שני, לינארית אך <u>לא</u> הומוגנית.

הפתרון (הכללי) למשוואה <u>לא</u> הומוגנית ניתן ע"י פתרון <u>פרטי</u> כלשהו למשוואה ועוד הפתרון <u>הכללי</u> למשוואה ההומוגנית.

כדי להראות זאת, תיקחו פתרון מסוים, ספציפי, שמצאתם $x_p(t)$.
כעת תיקחו פתרון כלשהו אחר למשוואה $x(t)$.
קל להוכיח שההפרש: $x_h(t) \equiv x(t) - x_p(t)$ מקיימת את המשוואה <u>ההומוגנית</u> (כלומר, אם תציבו את x_h באגף שמאל, אז באגף ימין תקבלו אפס).

את הפתרון הכללי למשוואה ההומוגנית כבר מצאנו מקודם.
במקרה של ריסון חלש (המקרה המעניין) הוא: $\boxed{x_h(t) = A_{mp}e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t+\varphi_0)}$

כאשר $\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}}$

כעת, כדי למצוא את הפתרון הכללי למשוואה <u>עם</u> האילוץ צריכים למצוא פתרון פרטי, מסוים, עבור המשוואה.

<u>איך נמצא את הפתרון?</u>

אנחנו למעשה דוחפים קפיץ בכוח חיצוני מחזורי עם תדירות ω_F. הגיוני לחשוב שפתרון אפשרי הוא שהקפיץ מתנדנד באותה תדירות שבה דוחפים אותו אולי עם הסטת פאזה כי יש <u>זמן</u> תגובה סופי לכוח הדוחף.

גם כן, נחפש פתרון פרטי: $X_p(t) = A\cos(\omega_F t + \varphi)$

$$\boxed{X_p(t) = \mathrm{Re}\{Ae^{i(\omega_F t - \varphi)}\}} \rightarrow$$

(A היא אמפליטודת התנועה
φ היא הפרש הפאזה בין הכוח לקפיץ)

שימו לב: כאן, הקבועים A, φ אינם קבועי אינטגרציה שנקבעים לפי תנאי ההתחלה.

אנו מחפשים כאן פתרון פרטי למשוואה, עם קבועים ידועים.

נמצא את A, φ ע"י הצבה במשוואה:

$$\ddot{X}_p + \frac{2}{\tau}\dot{X}_p + \omega_0^2 X_p = \frac{F_0}{m}e^{i\omega_F t}$$

מציבים את X_p ומקבלים שוויון אמ"מ

$$A = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2-\omega_F^2)+i\cdot\frac{2\omega_F}{\tau}}e^{i\varphi}$$

דורשים שהאמפליטודה A, תהיה ממשית, כלומר $Im\{A\}=0$.

מדרישה זו מקבלים (אחרי קצת אלגברה מייגעת)

$$\boxed{tg(\varphi) = \frac{2\omega_F}{\tau(\omega_0^2-\omega_F^2)}}$$

$$\boxed{A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega_F^2)^2+\frac{4\omega_F^2}{\tau^2}}}}$$

מצאנו מפורשות את האמפליטודה ואת הסחת הפאזה.

לכן, הפתרון הכללי למשוואה של אוסילטור מאולץ עם ריסון חלש הוא:

$$\boxed{X(t) = A_{mp}e^{-t/\tau}\cos(\omega t+\varphi_0) + A\cos(\omega_F t+\varphi)}$$

עבור זמנים $\tau \ll t$, האיבר השמאלי זניח לחלוטין.
למעשה פתרון זה רלוונטי רק בזמנים קצרים. זהו טרנזיינט שנעלם עם הזמן

לבסוף, נשאר רק עם הפתרון הפרטי שמצאנו:

$$\boxed{X(t) = A\cos(\omega_F t+\varphi) \qquad \Longleftarrow \; t \gg \tau}$$

כלומר בעבור זמן מספיק ארוך, הקפיץ ממשיך מתנודד ביחד עם הכוח המאלץ, באותה תדירות, אך עם הסחת פאזה כלשהי שמבטאת את זמן התגובה של הקפיץ לכוח המאלץ.

רזוננס

נניח מקרה שבו הריסון חלש מאוד [redacted] כלומר ניקח את זמן הדעיכה להיות אינסופי: $\tau \to \infty$.

במקרה כזה, האמפליטודה היא:

$$\boxed{A = \frac{F_0}{m\left|\omega_0^2-\omega_F^2\right|}}$$

אם אני מאלץ את הקפיץ לנוע בתדירות העצמית שלו, כלומר

אם $\boxed{\omega_F=\omega_0}$, נקבל כי $\boxed{A=\infty}$ $\Leftarrow$ אמפליטודה אינסופית.

כמובן שהדבר לא באמת אפשרי, והמשמעות היא שנכנסים אפקטים נוספים, לא ליניאריים שלא נלקחו בחשבון.

הרי הקירוב של האוסילטור ההרמוני רק בתנודות קטנות סביב ש"מ. כאן אנחנו ממש מחוץ לתחום הזה, ולמעשה "הרסנו" את הקפיץ (מתחנו אותו יותר מדי...)

גם אם יש ריסון סופי, ניתן לשאול מתי האמפליטודה תהיה מקסימלית. במילים אחרות, עבור איזה ω_F הביטוי:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega_F^2)^2 + \frac{4\omega_F^2}{\tau^2}}}$$

הוא מקסימלי?

חישוב מראה ש:

$$\boxed{\omega_{res}^2 = \omega_0^2 - \frac{2}{\tau^2} \qquad A_{max} = \frac{F_0\tau}{2m}\cdot\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2-\frac{1}{\tau^2}}}}$$

שאלות כלליות באוסילטורים

1) רוצים לבנות מעצור לדלת כך שהיא תיסגר מהר ככל האפשר, אבל ללא טריקה.

א) איזה סוג ריסון צריך לתת?

ב) אם $M = 5\times10^4\ gr$ מסת הדלת ו- $K = 5\times10^4 \frac{dyn}{cm}$ קבוע הקפיץ האפקטיבי של המעצור, אז מהו b (קבוע השיכוך)?

ג) מה יקרה אם נגדיל/נקטין את M מבלי לשנות את K או את b?

פתרון

א) ראינו שהדעיכה המהירה ביותר מתקבלת בתנאי ריסון קריטי (ולא ריסון חזק), כמו כן היות שהאמפליטודה קורסת אקספוננציאלית, היא לא באמת מתאפסת בזמן סופי, ולכן לא נקבל טריקה.

ב) נדרוש ש:
$$\sqrt{\frac{K}{M}} = \omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{b}{2M}$$
$$\boxed{b =} 2\sqrt{K\cdot M} = \boxed{10^5 \frac{gr}{sec}}$$

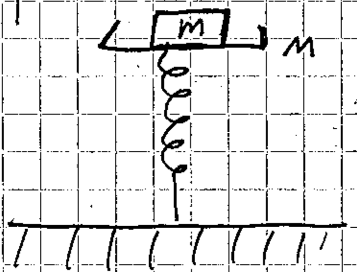
ג)
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{b}{2M}$$

אם נשאיר את b, K צוים אך נגדיל את M, נקבל ש $\omega_0 > \frac{1}{\tau}$ (כי $\frac{1}{M}$ קטן מהר יותר מאשר $\frac{1}{\sqrt{M}}$) ונקבל ריסון חלש ⟸ אוסצילציות ⟸ טריקה!

אם נקטין את M נקבל $\omega_0 < \frac{1}{\tau}$ ⟸ ריסון חזק
⟸ עדיין ללא טריקה, אבל סגירה לא הכי מהירה.

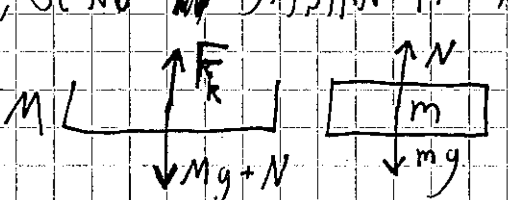
(2) נתון קפיץ עם קבוע קפיץ k. אל הקפיץ מחובר מגש בעל מסה M. על המגש מונחת מסה m. מפעילים כוח כך שהקפיץ מתכווץ ב- Δy (ביחס לש"מ) ומשחררים בפתאומיות.

מהו התנאי על Δy כך שהמסה m תתנתק מהמגש



פתרון

כל עוד המסה m מחוברת למגש, הם ינועו למעלה באותה תאוצה:



(I) $N - mg = ma$

(II) $F_k - N - Mg = Ma$

רגע ההתנתקות הינו כאשר הכוח הנורמאלי בין המסה למגש מתאפס (כל עוד יש כוח נורמאלי, המסה עדיין יושבת על המגש). במצב הזה:

$ma = -mg$

$\Downarrow$

$\boxed{a = -g}$

נשים לב שברגע הקריטי שבו m מתנתקת ($N=0$) עדיין התאוצות שוות. מכאן שברגע הבא, התאוצות כבר תהיינה שונות.

$\Downarrow$

$$\boxed{F_k} = Ma + Mg = M(-g) + Mg \boxed{= 0}$$

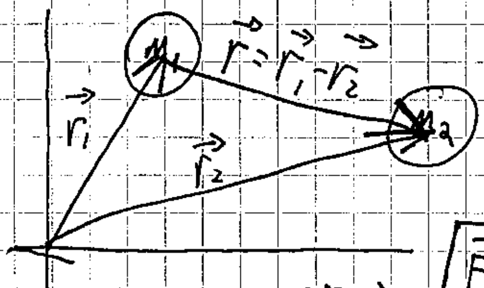
כלומר המסה תתנתק כאשר כוח הקפיץ מתאפס. זה קורה כאשר הקפיץ הוא רפוי (שימו לב: המצב של ש"מ, שם הקפיץ מכווץ בגלל הגרביטציה).

במצב ש"מ, הקפיץ מכווץ ביחס למצב הרפוי בשיעור: $\boxed{\Delta y_0 = \frac{(M+m)g}{k}}$

אם $\Delta y > \Delta y_0$, אז הקפיץ יחזור למצבו הרפוי בדרכו למעלה ואז המסה m תתנתק.

הבעיה הקפלרית בגרביטציה

נדון בהרחבה בפרק זה בשבוע הבא, אבל כעת נציג כמה תוצאות שקיבלתם בכיתה:



הכוח בין הגופים הוא מרכזי, כלומר תלוי רק במרחק בין הגופים ופועל בכיוון הרדיאלי. $\boxed{\vec F_{(\vec r)} = f(r)\hat r}$ (אצלנו, $f(r) = -\frac{GMm}{r^2}$).

נוח מהסוג הזה גורר:

1. שימור תנע כי המערכת סגורה.
2. שימור אנרגיה כי יש אנרגיה פוטנציאלית $U(r) = -\int f(r)dr$
3. שימור תנ"ז כי הכוח רדיאלי

$\Downarrow$

$\vec L = \sum_{i=1}^{2} \vec r_i \times \vec v_i = const$ $\Leftarrow$ המישור שמכיל את וקטור המיקום ואת וקטור המהירות הוא קבוע $\Leftarrow$ התנועה היא מישורית (במישור xy למשל)

משימור תנע, נובע שמרכז המסה של המערכת לא זז, ולכן נוח לפתור את הבעיה במערכת מרכז המסה, כך שקבוע ש- $\vec R_{cm} = 0$ $\Leftarrow$ $P_{tot} = m_1\dot r_1 + m_2\dot r_2 = const \overset{!}{=} 0$

פיתוח שנעשה בכיתה (ונחזור עליו קצת בשבוע הבא) מראה שניתן לפתור עבור וקטור המרחק בין הגופים $\vec r$ (כאשר $\vec R_{cm}=0$) ולקבל שבקורדינטות פולאריות:

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1+\varepsilon\sin(\theta+\varphi_0)}$$

כאשר:
- r המרחק בין הגופים
- θ הזווית הפולארית (ביחס לציר $\hat x$)
- φ_0 פאזה התחלתית וניתן לקבוע $\varphi_0 = 0$ ע"י שינוי כיוון $\hat x$.
- $r_0 = \frac{L^2}{GM\mu^2}$, $\mu = \frac{M\cdot m}{M+m}$ "מסה מצומצמת"
- $\varepsilon = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu^3(GM)^2}}$ 'אקסצנטריות'

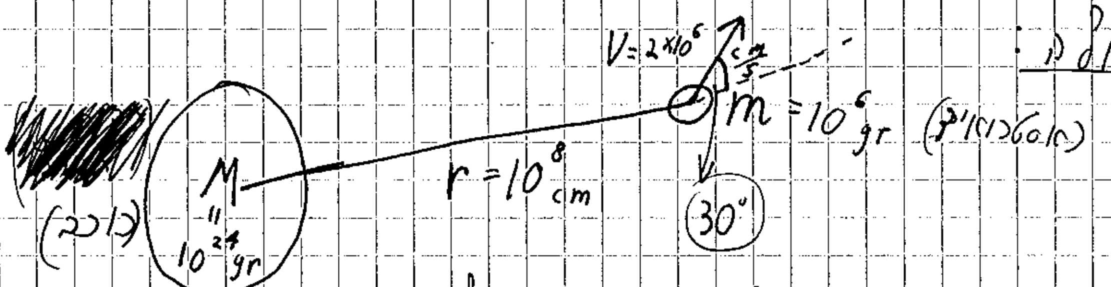
"מצב קשור" הוא מצב שבו $E_{tot}=E_k+U=E_k-\frac{GMm}{r}<0$ (אחרת, אם $E>0$, אז משימור אנרגיה $E_k>0$ כאשר $r\to\infty$ והגופים לא קשורים)

במצב כזה, מקבלים $E=-|E|$ ⇐ $\varepsilon=\sqrt{1-\frac{2|E|L^2}{\mu^3(GM)^2}}$ ⇐ $\boxed{0<\varepsilon<1}$

בתרגיל בית הראנו שבמצב כזה, התנועה היא אליפטית.

- כאשר $\varepsilon=0$ מקבלים $r_{(\theta)}=r_0$ ⇐ מעגל
- כאשר $E\geq0$, המערכת לא קשורה ומקבלים $\varepsilon\geq1$
- כאשר $E=0$ ⇐ $\varepsilon=1$ ⇐ פרבולה
- כאשר $E>0$ ⇐ $\varepsilon>1$ ⇐ היפרבולה.

שאלה:



למצוא את האקסצנטריות ε ולומר האם האסטרואיד קשור

$$\boxed{\mu}=\frac{Mm}{M+m}\approx\frac{Mm}{M}=\boxed{m} \Leftarrow \frac{M}{m}=10^{18}\gg1$$

התנע"ז של המערכת:

$$L=\mu\cdot r\cdot V\sin(30^\circ)$$

$$=10^6\cdot10^8\cdot2\times10^6\cdot\frac{1}{2}=\boxed{10^{20}\,gr\frac{cm^2}{sec}=L}$$

$$\boxed{E}=\frac{1}{2}\mu V^2-\frac{GMm}{r}=\ldots\boxed{\cong8.9\times10^{18}\,erg}$$

⇐ $E>0$ ולכן המערכת לא קשורה והתנועה תהיה היפרבולית עם $\varepsilon>1$.

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu^3(GM)^2}}=\ldots\cong1.18$$