2-body relaxation

Collisionless Systems

היום נדון בכמה תופעות דינאמיות מעניינות שמאפיינות
מערכות "חסרות התנגשויות" collisionless systems
שהכוח הפועל בין החלקיקים במערכת הוא ארוך טווח.
בקונטקסט שלנו, מדובר בכוכבים בגלקסיה.
כדי להדגים מדוע מערכת כוכבים ניתנת לתיאור
כ"חסרת התנגשויות", נניח הנחה פשטנית שרדיוס כל כוכב
בגלקסיה הוא רדיוס שמש $R_\odot \simeq 7\times10^{10}\,cm \simeq 2.3\times10^{-8}\,pc$
נפזר $N=10^{11}$ כוכבים כאלה באופן אחיד
בדיסקה גלקטית ברדיוס $R_d = 10_{kpc}$ ועובי $H_d = 0.5_{kpc}$
(פרמטרים קומים לשביל החלב או אנדרומדה).
הצפיפות המספרית של כוכבים בגלקסיה היא לכן:

$$n = \frac{10^{11}}{\pi\left[10^4\right]^2 \frac{1}{2}10^3} \cong 0.6\,pc^{-3}$$

חתך הפעולה הגאומטרי להתנגשות חזיתית בין 2 כוכבים
הוא $\sigma = \pi(2R_\odot)^2 \simeq 6.5\times10^{-15}\,pc^2$

(התעלמנו כאן מאפקט של Gravitational Focussing)

לכן המהלך החופשי בין התנגשויות חזיתיות הוא

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \simeq 2\times10^{14}\,pc = 2\times10^{11}\,kpc \gg R_{vir}$$

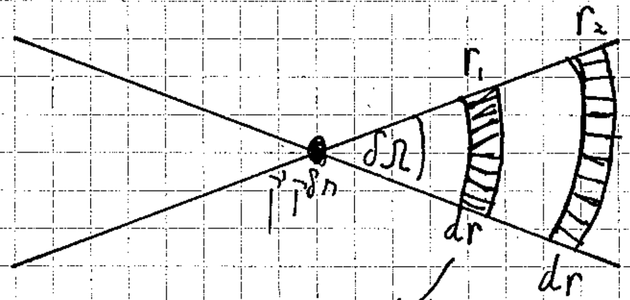
הזמן האופייני בין התנגשויות הוא:

$$\tau \simeq \frac{\lambda}{V} \simeq \frac{2\times10^{14}\,pc}{50\,\frac{km}{sec}} \simeq 5\times10^{18}\,yr \gg T_{Hubble}$$

מהירות דיספרסיה
σ_{rms}

אם כך, כמעט לכל צורך ניתן להזניח לחלוטין התנגשויות חזיתיות בין כוכבים בגלקסיה (דבר זה לא בהכרח נכון לגבי המרכזים של צבירי כוכבים צפופים, או במרכז של הגלקסיה, שם הצפיפויות יכולות להיות גדולות בהרבה והדינאמיקה היא שונה).

מהו האפקט של האופי ארוך הטווח של כוח הגרביטציה?



$$\begin{cases} m_1 = r_1^2\, dr\, d\Omega \\ m_2 = r_2^2\, dr\, d\Omega \end{cases}$$

נתבונן בקונוס עם זווית פתיחה $d\Omega$ שמרוכז בחלקיק, ונשאל מי הם החלקיקים שמשפיעים על החלקיק בצורה החזקה ביותר. כוח הגרביטציה קוטן כמו $F_G \propto r^{-2}$.
אבל, אם נניח כי צפיפות הכוכבים היא אחידה, אזי מספר הכוכבים שמושכים את הכוכב המרכזי שלנו, ליחידת אורך בקונוס, גדל כמו r^2. הדבר אומר שהכוח שפועל על הכוכב המרכזי בגלל הגרביטציה של כוכבים אחרים בקונוס, הוא קבוע ליחידת אורך בקונוס.
אם נתבונן בסה"כ הכוח בגלל כוכבים בקטע $[r,2r]$ ובגלל כוכבים בקטע $[2r,4r]$ (אינטרוול לוגריתמי קבוע) אזי האינטרוול הרחוק יותר משפיע חזק יותר על הכוכב המרכזי שלנו!
כמובן, אם הרקע ספירי לחלוטין אז הכוכב המרכזי כלל לא יחוש כוח. אבל, מספיק אנ-איזוטרופיות קטנה כדי לגרום לכוכב

המרכזי לחוש נטו כוח, שמי ששולט בכמ הצה הם הכוכבים
הרחוקים (Large Scale).

צו תמונה הפוכה שמתאים לגז אידיאלי בקופסא, שם האינטרקציות הן קצרות טווח וניתן למדל אותן כאל התנגשויות אלסטיות בין חלקיקים.

התוצאה המרכזית של הדיון למעלה היא שהכוח על כוכב בוחן בגלקסיה לא משתנה בצורה מהירה ופתאומית, כי הוא לא נשלט ע"י הסביבה המיידית של הכוכב.

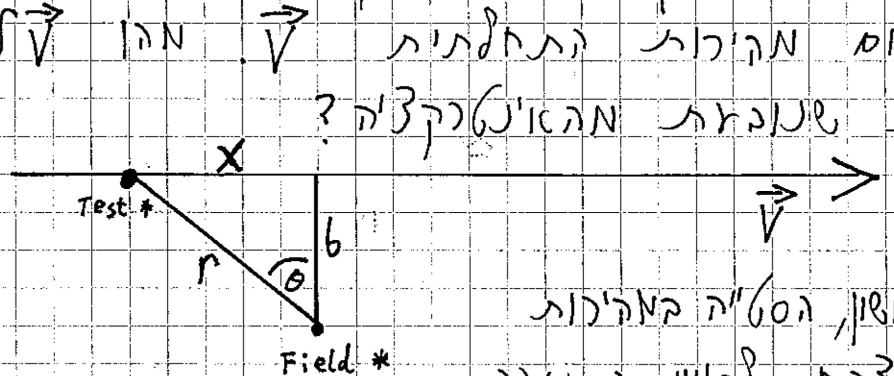
לכן ניתן להניח שהכוכב מאיץ בצורה חלקה בפוטנציאל החלק שנובע מסך הכוכבים בגלקסיה, במקום להתייחס לאוסף של מסות נקודתיות.

זה הסקר סופס → התנועה הממוצעת. כעת נבחן סטיות מקירוב זה במספר מקרים מעניינים.

The Relaxation Time, 2-Body Relaxation

נסמן "כוכב בוחן" המשוטט בגלקסיה במסלול התחלתי שנובע מהפוטנציאל החלק של כלל התפלגות המסה. ננסה להעריך את מידת הסטייה מתנועה זו שנגרמת מכוכבים בודדים שכוכב הבוחן שלנו חולף לידם.

נניח שכוכב הבוחן" חולף במרחק b מכוכב שדה (Field Star) מסוים, עם מהירות התחלתית $\vec{V}$. מהו $\delta\vec{V}$, הסטייה במהירות שנובעת מהאינטרקציה?



בסדר ראשון, הסטייה במהירות תהיה ניצבת לכיוון התנועה המקורי, $\delta V_\perp$. $\delta V_\parallel = 0$ כי בממוצע הוא יתאפס: האצה לפני המעבר הקרוב והאטה אחרי המעבר הקרוב.

נניח שהסטייה קטנה, כלומר $|\vec{V}| \gg |\delta \vec{V}_\perp|$, ולכן ניתן לקרב את מסלול כוכב הבוחן לקו ישר מנקודת המבט של מפעיל הכוח. זה יאפשר לנו להעריך את $|\delta \vec{V}_\perp| \equiv \delta v_\perp$ ע"י אינטגרל של

$$F_\perp = \frac{Gm^2}{b^2+x^2}\cdot \cos\theta$$ כאשר $-\infty < x < \infty$.

נגדיר $x = vt$, כך שהגדרנו זמן $t=0$ כאשר הכוכבים במרחק מינימלי b זה מזה. לכן:

$$F_\perp = \frac{Gm^2}{b^2+x^2}\cdot\frac{b}{\sqrt{b^2+x^2}} = \frac{Gm^2 b}{\left(b^2+(vt)^2\right)^{3/2}} = \frac{Gm^2}{b^2}\left[1+\left(\frac{vt}{b}\right)^2\right]^{-3/2}$$

$$\delta V_\perp = \int_{-\infty}^{\infty} a_\perp(t)\,dt = \frac{Gm}{b^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[1+\left(\frac{vt}{b}\right)^2\right]^{-3/2} dt = \frac{Gm}{bV}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+s^2\right)^{-3/2} ds =$$

$$\boxed{\delta v_\perp = \frac{2Gm}{bV} = \underbrace{\frac{Gm}{b^2}}_{\text{תאוצה בזמן closest approach}}\cdot\underbrace{\frac{2b}{V}}_{\text{הזמן שלוקח לחלקיק לעבור במרחק } b \text{ מהכוכב.}}}$$

שימו לב שההנחה שלנו על סטייה קטנה במהירות נשברת כאשר $\delta v_\perp \approx V$ כלומר כאשר

$$b \simeq \frac{2Gm}{V^2} \equiv b_{90}$$

זהו המרחק שבו המהירות של תנועה מעגלית סביב הכוכב בהשפעת הגרביטציה היא בערך המהירות היחסית בין הכוכבים V, שכן: (*) $\boxed{\frac{V^2}{2} \approx \frac{Gm}{b_{90}}}$ כלומר זהו המרחק שפנימה אליו, עבור $b < b_{90}$, הגרביטציה של הכוכב שולטת בדינאמיקה של כוכב הבוחן.

כלומר, נניח

$$\boxed{b > b_{90} = \frac{2Gm}{V^2}}$$

(* האנרגיה הקינטית של כוכב הבוחן שווה לאנרגיה הפוטנציאלית בקרבת הכוכב)

נניח שבגלקסיה יש N כוכבים שווי מסה m בגלקסיה

עם גודל אופייני R. מספר הכוכבים ליחידת שטח

הוא אם כן: $\frac{N}{\pi R^2}$.

לכן, כאשר חלקיק הבוחן שלנו חוצה את הגלקסיה פעם

אחת, מספר האינטראקציות שהוא חווה עם כוכבים במרחק

$[b, b+db]$ מהם הוא: $\boxed{\delta n =} \frac{N}{\pi R^2}\cdot 2\pi b\,db = \boxed{\frac{2N}{R^2} b\,db}$

כל אינטראקציה כזו יוצרת שינוי $\delta\vec{V}_\perp$ למהירות החלקיק.

אבל, בגלל שמיקום הכוכבים המפריעים הוא רנדומלי, גם

הכיוון של $\delta\vec{V}_\perp$ יהיה רנדומלי (במישור שניצב ל-$\vec{V}$)

ובממוצע סך השינוי יתאפס (או ליתר דיוק, סך השינוי

ינבע מהגרדיינטים של הפוטנציאל החלק, אבל אנחנו בדיוק

מתעניינים בסטיות מתנועה חלקה זו).

אבל, $\delta V_\perp^2$ נסכם! בעצם יש לנו <u>מהלך שיכור</u> במרחב

$\vec{V}_\perp$, ולכן עלינו לחשב את ה-Rms (root mean square).

$$\Delta V_{\perp(b)}^2 = \sum \delta V_\perp^2 \simeq \delta V_\perp^2 \cdot \delta n = \frac{4G^2m^2}{b^2V^2}\cdot\frac{2N}{R^2} b\,db = \frac{8NG^2m^2}{V^2R^2}\frac{db}{b}$$

כדי לחשב את הסטייה הכוללת עלינו לבצע אינטגרציה על b

$$\boxed{\Delta V_\perp^2 =} \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{8NG^2m^2}{R^2}\frac{db}{b} = \boxed{\frac{8NG^2m^2}{R^2V^2}\ln\frac{b_{max}}{b_{min}} \equiv 8N\left(\frac{Gm}{RV}\right)^2 \ln\Lambda}$$

העובדה כי התלות היחידה ב-b היא לוגריתמית היא

תוצאה של העובדה שכל הסקלות יתרמו לאפקט הזה אותו

הסדר. התרומה הכוללת בין b לבין αb היא זהה

לתרומה הכוללת בין αb לבין $\alpha^2 b$ ובין $\frac{1}{\alpha}b$ לבין b.

Coulomb Logarithm -ה נקרא $\ln(\Lambda) \equiv \ln\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right)$

ומופיע גם בפיסיקת הפלסמה, שם יש אפקט אנלוגי
לגמרי לאפקט שאנו מתארים פה.

מהם $b_{min,max}$? אמרנו שכל המודל שלנו לא תקף

עבור $b < b_{90}$ ולכן נניח כי $\boxed{b_{min} = f_1 \cdot b_{90}}$
(חשבון מפורט יותר מראה שהסקלות של $b < b_{90}$, שם האינטרקציות
חזקות, תורמות בערך אותו הדבר. יש הרבה פחות אינטרק'
כאלו אבל כל אחת חזקה יותר. לכן אנחנו לא מפספסים
הרבה ע"י זה שאנו מזניחים אותן).

כמו כן, ניתן לקחת $b_{max} = f_2 \cdot R$ כאשר
R רדיוס הגלקסיה.

$$\ln(\Lambda) = \ln\left(\frac{R}{b_{90}}\right) + \ln\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$$

f_1, f_2 שניהם מסדר גודל יחידה, ובגלל התלות הלוגריתמית
המאוד חלשה, לא נטעה בהרבה אם נניח $\frac{f_2}{f_1} = 1$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\ln(\Lambda) \simeq \ln\left(\frac{R}{b_{90}}\right), \quad \Delta V^2 \cong 8N\left(\frac{Gm}{RV}\right)^2 \ln(\Lambda)}$$

התהליך שתיארנו יוצר מעין דיפוזיה של המהירות של כוכב
הבוחן שהיא נפרדת מהתאוצה הממוצעת הנובעת
מהפוטנציאל החלק. לתהליך דיפוזיה זה קוראים

2-body-relaxation, כי הוא נובע מאפקט קומולטיבי
של אינטרקציות דו-גופיות.

מהירות אופיינית של כוכב בודד בגלקסיה היא מהירות
הסיבוב הקפלרי של חלקיק בקצה הגלקסיה: $V^2 \approx \frac{GNm}{R}$

$\Downarrow$

$$\boxed{\frac{\Delta V^2}{V^2} \approx \frac{8\ln(\Lambda)}{N}} \longrightarrow$$ שינוי יחסי בחצייה אחת של הגלקסיה

$\Downarrow$

נגדיר את n_{relax} להיות מספר הפעמים שצריך הכוכב
לחצות את הגלקסיה לפני שיתקיים $\Delta V^2 \sim V^2$, כלומר הכוכב
ישכח את תנאי ההתחלה שלו עקב דיפוזיה של המהירות.

$\Downarrow$

$$n_{relax} \approx \frac{V^2}{\Delta V^2} \approx \frac{N}{8\ln(\Lambda)}$$

הזמן שזה לוקח נקרא זמן הרלקסציה relaxation time
והוא מוגדר להיות: $t_{relax} \cong n_{relax} \cdot t_{cross}$

כאשר $t_{cross} \sim \frac{R}{V}$ זה הזמן שלוקח לכוכב
טיפוסי לחצות את הגלקסיה.

(שים לב: $\ln(\Lambda) \sim \ln\left(\frac{R}{b_{90}}\right) \sim \ln\left(\frac{RV^2}{Gm}\right) \sim \ln(N)$

$\Downarrow$

$$\boxed{t_{relax} \simeq \frac{0.1N}{\ln(N)} \cdot t_{cross}}$$

בגלקסיה טיפוסית, $N \sim 10^{11}$, $R \cong 10\,kpc$, $m \sim M_\odot$

$\Leftarrow$ $V \sim 200\,\frac{km}{sec}$ $\Leftarrow$ $t_{cross} \simeq 5\times10^{7}\,yr$ $\Leftarrow$ $\boxed{t_{relax} \simeq 2\times10^{16}\,yr}$

כלומר הגלקסיות עדיין זוכרות את תנאי ההתחלה שלהן.

They are <u>not</u> relaxed!

בצבירי כוכבים, Globular Clusters, $N \sim 10^5$, $R \sim 10\,pc$

$\Leftarrow$ $t_{cross} \simeq 1\,Myr$ $\Leftarrow$ $t_{relax} \simeq 900\,Myr$ $\Leftarrow$ Relaxed!

אחת ההגדרות לגלקסיה, לעומת ענן שרירותי או צביר כוכבים או משהו אחר, היא שגלקסיה לא תהיה relaxed !

Dynamical Friction

חיכוך הינו תהליך שגורם להפחית, עד כדי עצירה, את המהירויות היחסיות בין גופים שונים.

"חיכוך דינאמי" או dynamical friction, הוא אותו תהליך שנעשה באמצעות הגרביטציה.

התמונה שיש לנו בראש היא של הרבה גופים קטנים המפוזרים במרחב (איזוטרופי לצורך העניין) עם צפיפות ρ. בממוצע הגופים האלה הם במנוחה (פרט למהירויות אקראיות קטנות).

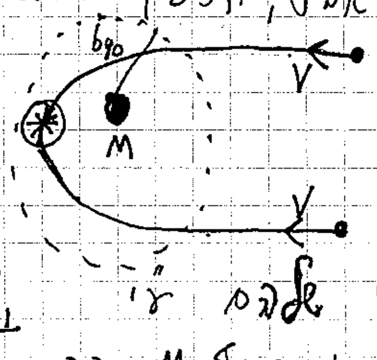
אז יש גוף מאסיבי עם מסה M שנע במהירות V יחסית לרקע. הקונספט של חיכוך אומר לנו שהמסה M תשאף להקטין את המהירות היחסית בינו לבין הרקע (כלומר את V), אבל רק באמצעות גרביטציה ומבלי "לגעת"/להתנגש בחלקיקים האחרים.

כפי שראינו, לגוף הזה משתייכת סקלת אורך אופיינית:

שקראנו לה b_{90}: $b_{90} \simeq \frac{2GM}{V^2}$ $\Leftarrow$ $\boxed{\frac{V^2}{2} = \frac{GM}{b_{90}}}$

כאמור זהו המרחק שממנו פנימה, חלקיק בוחן יסטה ב־$90°$ מהמסלול המקורי שלו בעקבות האינטראקציה עם הגוף הגדול.

כפי שראינו אצל אבישי, הרעיון הכללי של חיכוך דינאמי הוא



שחלקיקי רקע שחולפים עליך המסה M מוסטים מהמסלול ההתחלתי שלהם ע"י $V_\perp$ כמו שראינו מקודם, והם יצטברו מאחורי הגוף M כך שהצפיפות ב־⊛ תהיה גבוהה יותר, וזה "יצור כוח" שיאט את M וימשוך אותו

אחורה. יש שני דרכים להעריך אפקט זה כמותית.
נעבור עליהם, תחילה בחישוב "סדר גודל" ואז בחישוב
מדוייק שיוביל לנוסחאת צ'נדרסקאר המפורסמת.

[redacted]

① שיקולי יחידות: בעצם צריכים להעריך את כוח הגרביטציה [redacted] בין המסה M לבין ההצטברות של החלקיקים מאחורין (The Wake). $F \propto (G M \cdot m_{wake})$

אבל, $m_{wake} \propto M$ מכיוון שבלעדי הגרביטציה של M, לא היינו מראש מקבלים wake. לכן, נצפה לקבל $F \propto (GM)^2 \Longrightarrow$ אפקט סדר שני.

הפרמטרים הרלוונטיים לבעיה הם: G, M, ρ, V

ננסה לבנות גודל עם יחידות של כוח:

$$gr \cdot cm \cdot sec^{-2} \propto G^{\alpha} M^{\beta} \rho^{\gamma} V^{\delta} = [redacted]\, cm^{3\alpha} sec^{-2\alpha} \cdot gr^{\gamma} \cdot cm^{-3\gamma} \cdot cm^{\delta} \cdot sec^{-\delta}$$

האפקט הוא גרביטציוני ולכן נצפה ש- G יופיע תמיד בצימוד ל- M, כלומר $\alpha = \beta$. $[GM] = \frac{erg}{gr} \cdot cm = [redacted]\, cm^3 sec^{-2}$

$$\cancel{\boxed{\gamma = 1} \to [redacted] = 1-\alpha}$$
$$\cancel{3\alpha - 3\gamma + \delta = 1 \to 3\alpha - 3 + 3\alpha + \delta = 1 \to \boxed{\delta = 4 - 6\alpha}}$$
$$\cancel{-2\alpha - \delta = -2 \to -2\alpha - 4 + 6\alpha = -2 \to 4\alpha = 6 \to \alpha = \tfrac{3}{2}}$$

$$\boxed{\gamma = 1}$$
$$3\alpha - 3\gamma + \delta = 1 \to 3\alpha + \delta = 4 \to \boxed{\delta} = 4 - 3\alpha = 4 - 6 \boxed{= -2}$$
$$-2\alpha - \delta = -2 \to -2\alpha - 4 + 3\alpha = -2 \to \boxed{\alpha = 2}$$

$$\boxed{F_{DF} \propto \frac{(GM)^2 \cdot \rho}{V^2}}$$

I שימור תנע של מסלולים מוסטים

בדיון שלנו על רלקסציה, אמרנו שחלקיק בוחן שעובר ליד
מסה מקבל בסדר ראשון רק $\Delta V_\perp$ שונה, בסדר ראשון, $\Delta V_\parallel$
מתאפס לפני ואחרי האינטראקציה.
כמובן שזה לא נכון במדויק, וכן יש $\Delta V_\parallel \neq 0$. כלומר התנע
של חלקיק הבוחן בכיוון המקביל השתנה. תנע זה עבר
למסה M ובעצם נתן לו דחיפה בכיוון ההפוך למהירותו
וכך האט אותו ← אפקט החיכוך!

(*) איך נעריך את $\Delta V_\parallel$? הרי עלינו לעשות חשבון סדר שני
לא! נשתמש בטריק: שימור אנרגיה של חלקיק הבוחן:

$$V^2 = (V-\Delta V_\parallel)^2 + (\Delta V_\perp)^2, \quad \Delta V_\perp = \frac{2GM}{bV} = \frac{GM}{b^2}\cdot\frac{2b}{V}$$

$$\Delta V_\parallel = V - \sqrt{V^2-\Delta V_\perp^2} = V\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{\Delta V_\perp}{V}\right)^2}\right] \simeq V\left[\frac{1}{2}\frac{\Delta V_\perp^2}{V^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2V}\cdot\frac{4G^2M^2}{b^2V^2} = \boxed{\frac{2G^2M^2}{b^2V^3}\simeq \Delta V_\parallel}$$

שימור תנע:

$$\underbrace{M\cdot\frac{dv}{dt}}_{\text{שינוי בתנע של M}} \cong \underbrace{(\rho\cdot b^2\cdot V)}_{\text{שטף של חלקיקים עם מקדם פגיעה b}}\cdot\underbrace{\Delta V_\parallel}_{\text{שינוי המהירות}} \sim \frac{G^2M^2\rho}{V^2}$$

$$\Downarrow$$

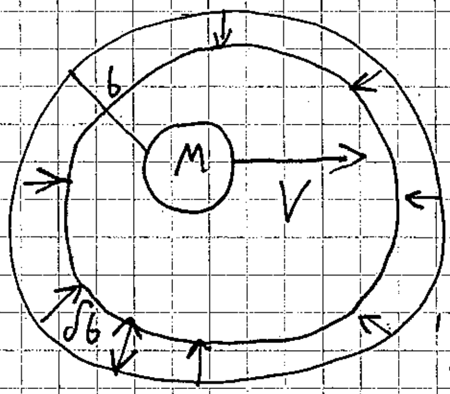
$$\boxed{F_{D.F.} \simeq \frac{G^2M^2\rho}{V^2}}$$

שימו לב שb הצטמצם!
שכן, זה מראה שכל הסקלות
תורמות אותו הדבר כמו
שראינו.
מספר הסקלות ניתן ע"י הלוגריתם
של Coulomb $\ln\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right)$

(*) סדר ראשון, כי בחישוב המקורי הנחנו שמסלול חלקיק הבוחן הוא קו ישר
כאשר אינטגרלנו על הכוח הפועל עליו

Gravity of wake (II)

• כשהמסה M עומדת במקום, היא מושכת אליה חלקיקים מהרקע. אם המסה זזה, כל החלקיקים שהיא משכה אליה עדיין שם. זה יוצר את ה- wake וננסה להעריך את זה.



$$\underbrace{\delta b}_{\substack{\text{מידת הכיווץ}\\ \text{כמה זזו חלקיקי}\\ \text{הרקע}}} \sim \underbrace{\frac{GM}{b^2}}_{\text{תאוצה}} \cdot \underbrace{\left(\frac{b}{V}\right)}_{\substack{\text{זמן אופייני}\\ \text{בתהליך}}}^2 \sim \frac{GM}{V^2} \sim b_{90}$$

המסה של ה- wake שנוצרה עד שהמסה M זזה מרחק b. $\Longleftarrow$ $\delta M \sim \underbrace{\rho \cdot b^2}_{(4\pi)} \cdot (\delta b) \sim \frac{GM\rho b^2}{V^2}$

שימו לב ש- (δb) לא תלוי ב- b. כל סקלה מתכווצת באותה מידה.

$$\boxed{F_{DF} \sim \frac{GM\delta M}{b^2} \sim \frac{G^2M^2\rho}{V^2}}$$

בצורה מעט מדויקת יותר:

כפי שראינו בחישוב (I):

$$\delta V_\perp = \frac{2GM}{bV} \Rightarrow \delta V_\parallel \cong \frac{2G^2M^2}{b^2V^3}$$

$$\Downarrow$$

$$M\frac{dV}{dt} \simeq -\int \underbrace{2\pi b\,db \cdot \rho \cdot V}_{\substack{\text{שטף המסה שנכנסת}\\ \text{לטבעת } [b,\, b+db]}} \cdot \delta V_\parallel = -\frac{4\pi G^2M^2\rho}{V^2}\int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{db}{b}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{DF} = 4\pi \frac{G^2M^2\rho}{V^2} \cdot \ln(\Lambda)} \qquad \boxed{\Lambda \equiv \frac{b_{max}}{b_{min}} \quad \text{כמו מקודם}}$$

$$\boxed{\frac{M\,d\vec{V}}{dt} = -4\pi G^2M^2\rho \frac{\vec{V}}{V^3}\ln(\Lambda)}$$

• החשבון הנ"ל הוא עבור תווך הומוגני, סטטי, ואינסופי.

• כאמור, יש אי-וודאויות בפקטור ~ 2 מהם b_{min}, b_{max}

אבל בתוך ה- $\ln$ זה לא חשוב.

כמובן שליד שפת הגלקסיה, השגיאה גדולה יותר,

כי הנחת ההומוגניות לא תקפה.

• כאמור, חישוב מדויק מראה שסקלות מתחת ל- b_{min}

תורמות בדיוק כמו ~~...~~ כל סקלה מעל b_{min}

לכן, כל עוד יש הרבה סקלות, כלומר כל עוד $\ln(\Lambda) \gg 1$

הוספת הסקלה הנוספת הנ"ל לא תשפיע.

למעשה נחליף $\ln(\Lambda) \mapsto \ln(\Lambda) + O(1)$.

• במקרים שבהם $b_{max} \sim b_{min}$, החשבון שלנו לא מדויק.

• מדוע הסקלות הקטנות (ההתנגשויות החזקות) לא תורמות יותר?

$\Leftarrow$ חלקיקים עם $b < b_{90}$ קיבלו הסטה של $\sim 90°$

ולכן איבדו את כל התנע שלהם בכיוון המקבילי.

ככל שמקטינים את b, הם ירוויחו תנע בכיוון ההפוך

עד שלכל היותר יקבלו הסטה של $180°$.

כלומר התנע שנלקח מהמסה M גדל בפקטור 2

יחסית ל- $90°$.

אבל, מספר החלקיקים שמתקרבים למרחק b הוא $\sim b^2$

(שטף המסה הוא $\pi b^2 \cdot \rho \cdot V$)

לכן, למשל אם $b \sim \frac{1}{10} b_{90} \to \boxed{N \sim \frac{1}{100} N_{90}}$

והם ירוויחו (בערך) פי 2 תנע מ- N_{90}!

$\Leftarrow$ האפקט עבור b קטן הוא $\sim 2b^2$

" " b גדול " $\sim \underbrace{\frac{1}{b^2}}_{\Delta V_\parallel} \cdot b^2 \sim O(1)$ לא תלוי בסקלה!

• מדוע העובדה שאוני צד לא גורם לחיכוך דינאמי עם החומר ביקום? למה אנדרומדה לא מושכת אותנו אחורה?

$\Rightarrow$ לאופק לוקח זמן סופי לעבור, ועלינו לעבור מרחק σ עד שסקלה σ תתחיל להשפיע עלינו

<u>שימו לב:</u>

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{-4\pi G^2 M \rho \cdot \ln(\Lambda)}_{\text{קבוע}} \cdot \frac{\vec{v}}{\boxed{v^3}}$$

כמו חוק ניוטון רק עם $\vec{v}$ במקום $\vec{r}$.

ויעזור לנו לפתור את המקרה הכללי שיש לחלקיקי הרקע מהירות רנדומאלית σ.

<u>מקרה כללי</u>

גוף במסה M עם מהירות V. לרקע יש <u>התפלגות מהירות</u> $f(\vec{v}_b)$.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -4\pi G^2 M \rho \ln(\Lambda) \underbrace{\int d^3 v_b \, f(\vec{v}_b) \frac{\vec{v}-\vec{v}_b}{|\vec{v}-\vec{v}_b|^3}}_{\text{כמו ניוטון!}}$$

אם ההתפלגות $f(\vec{v}_b)$ <u>איזוטרופית</u>, אז באנלוגיה לחוק גאוס בגרביטציה ובחשמל, נקבל תרומה לכוח רק מחלקיקים עם מהירויות $|\vec{v}_b| < V$. כמו כן, עבור מהירויות אלו, הכוח הוא כמו חלקיק נקודתי עם $V_b = 0$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = -4\pi G^2 M \rho \ln(\Lambda) \cdot \underbrace{\int_0^V}_{\text{חלקיקים איטיים}} f(v_b) \cdot 4\pi v_b^2 \underbrace{\frac{\vec{v}}{v^3}}_{\text{point source}} dv_b$$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = -16\pi^2 G^2 M \rho \ln(\Lambda) \frac{\vec{v}}{v^3} \int_0^V v_b^2 f(v_b) \, dv_b}$$

Chandrassek-har's Formula

① עבור $V \gg \sqrt{\langle V_b^2 \rangle} = V_{b,rms}$, ניתן לקרב את האינטגרל:

$$\int_0^V V_b^2 f(V_b)\, dV_b \simeq \int_0^\infty V_b^2 f(V_b)\, dV_b = \frac{1}{4\pi}$$

בגלל הנרמול $\int d^3 V_b\, f(\vec{V}_b) = 1$.

לכן:

$$\boxed{\frac{d\vec{V}}{dt} = -4\pi G^2 M \rho \ln(\Lambda) \frac{\vec{V}}{V^3}}$$

בדיוק כמו במקרה של רקע סטטי (לא מפתיע...)

הזמן האופייני שייקח לחלקיק לאבד את כל האנרגיה שלו ולהתחיל לנוע יחד עם הרקע הוא:

$$\boxed{\tau_{DF} \sim \frac{V}{\dot{V}} \sim \frac{V}{M\rho / V^2} \sim \frac{V^3}{M \cdot \rho}}$$

וזהו זמן ארוך כאשר V גדול.

② במהירויות נמוכות: $V \ll \sqrt{\langle V_b^2 \rangle}$ נוכל לקרב:

$$\int_0^V V_b^2 f(V_b)\, dV_b \simeq \int_0^V V_b^2 f(0)\, dV_b = \frac{V^3}{3} f(0)$$

$$\boxed{\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{16\pi}{3} G^2 M \rho \ln(\Lambda) \cdot \vec{V}}$$

$$\tau_{DF} \sim \frac{V}{\dot{V}} \propto \frac{1}{G^2 M \rho} = \text{const}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(t) \propto e^{-t/\tau_{DF}}} \rightarrow$$ דעיכה אקספוננציאלית של המהירות.