חשמל ומגנטיות - תרגול 2

- שדה חשמלי
- שטף
- זווית מרחבית
- חוק גאוס (האינטגרלי)

שדה חשמלי

שבוע שעבר ראינו את חוק קולון המתאר את הכוח החשמלי שפועל על מטען q_1 שנמצא בנקודה $\vec{r}_1$ עקב מטען q_2 שנמצא בנקודה $\vec{r}_2$:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = K\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}$$

ראינו עוד את "עיקרון הסופרפוזיציה" האומר כי יש N מטענים $q_1,\dots,q_N$ בנקודות $\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N$ ומטען נוסף (מטען בוחן) q בנקודה $\vec{r}$, אז הכוח החשמלי הכולל שירגיש המטען בוחן הוא סכום הכוחות החשמליים שמרגיש המטען מכל אחד מ-N המטענים הנקודתיים לפי חוק קולון

$$\boxed{\vec{F}_{tot}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} Kq\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)}$$

ברגע שיש הרבה מטענים, זה יהיה סבוך כל פעם לחשב מחדש את הסכום הזה. לכן, מנצלים את העובדה שהכוח החשמלי על מטען q הוא ליניארי ב-q כדי להגדיר את השדה החשמלי

$\vec{F}(\vec{r}) = q\cdot\vec{E}(\vec{r})$. השדה החשמלי $\vec{E}$ הינו שדה וקטורי: בכל נקודה $\vec{r}$ במרחב, ישנו וקטור $\vec{E}$ שמתאר את השדה החשמלי בנקודה זו.

שמים לב שעבור מטען יחידה $q=1$, הכוח שיפעל עליו בנקודה $\vec{r}$ הוא בדיוק השדה החשמלי באותה נקודה.

במובן הזה, השדה החשמלי הוא הכוח ליחידת מטען, כלומר
הכוח שירגיש מטען $q=1$ שנמצא בנקודה הזו.

יחידות של שדה: $[E]=\frac{[F]}{[q]}=\frac{N}{C}$

מטענים חשמליים יוצרים סביבם שדה חשמלי (משרים שדה חשמלי על המרחב), וע"י כך מבצעים אינטרקציה עם חלקיקים אחרים, המרוחקים מהם, שמגיבים עם השדה החשמלי.

מחוק קולון הנ"ל זה ברור שמטען נקודתי q' שנמצא בנקודה $\vec{r}'$ יוצר שדה:

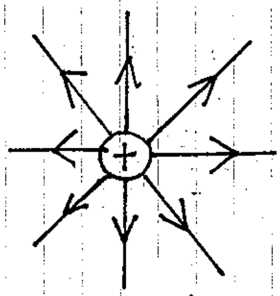
$$\boxed{\vec{E}(\vec{r})=\frac{Kq'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')}$$

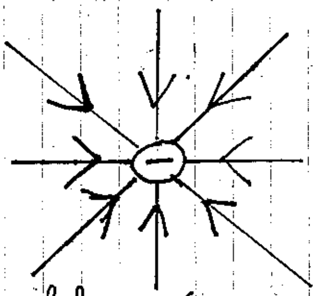
עיקרון הסופרפוזיציה אומר כי השדה השקול מאוסף מטענים הוא סכום וקטורי של השדות של כל מטען בנפרד:

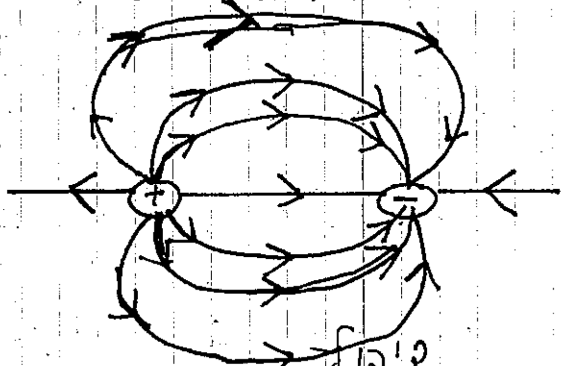
$$\boxed{\vec{E}_{tot}(\vec{r})=\sum_{i=1}^{N}\frac{Kq_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)}$$

קווי שדה

דרך ויזואלית לתאר שדה חשמלי היא ע"י שימוש בקווי שדה אלה קווים שהם מקבילים לשדה החשמלי בכל נקודה והצפיפות שלהם מעידה על עוצמת השדה בנקודה.


מטען חיובי


מטען שלילי


דיפול

שימו לב שקווי שדה תמיד יוצאים ממטענים חיוביים ומתנקזים למטענים שליליים. במובן הזה ניתן לומר

שמטענים חיוביים מהווים "מקור" לקווי שדה (באותו אופן שברז פתוח מהווה מקור לזרימה של מים) ואילו מטענים שליליים מהווים ניקוז לקווי שדה (באותו אופן שכיור/תעלת ניקוז מהווים ניקוז לזרימה של מים).
(האנלוגיה לזרימה של מים תשמש אותנו כשנדבר על שטף וחוק גאוס).

עוד תכונה: קווי שדה לא חוצים זה את זה פרט לנקודות בהן יש מטענים, כיוון שבכל נק' אחרת כיוון השדה מוגדר היטב.

דוגמא:

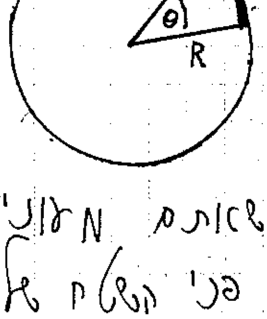
נתונה קליפה כדורית חלולה, עם מטען כולל Q הטעונה בצפיפות מטען משטחית אחידה σ. הראו שבכל נקודה בתוך הכדור, השדה החשמלי מתאפס.

$\Leftarrow$ אחרי שנלמד על חוק גאוס, נראה שזו בעצם שאלה קלה, אבל כאן נרצה להוכיח ישירות לפי עקרון הסופרפוזיציה שהתרומות לשדה מכל האלמנטים על פני השטח של הכדור מתבטלות.

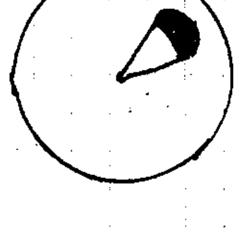
לפני שנפתור את השאלה, נזכיר את מושג הזווית המרחבית:

זווית מרחבית:

בשני ממדים, ידוע שאורך הקשת במעגל ברדיוס R שמכסה זווית θ (הנמדדת ברדיאנים) הוא $L=R\cdot\theta$



בשלושה ממדים יש מושג דומה, כאשר רוצים לחשב שטח חלקי מתוך קליפה כדורית.
דמיינו למשל כדורגל. קליפת הכדור מכוסה במחומשים שחורים ולבנים, ונניח שאנחנו מעוניינים בשטח שמכסה מחומש אחד כזה מתוך כל פני השטח של הכדור.



מגדירים זווית מרחבית, Ω, כך שהשטח הנ"ל יהיה $\boxed{A=\Omega\cdot R^2}$ כאשר R זה רדיוס הקליפה הכדורית.

מכך שהשטח הכולל של קליפה כדורית הוא $4\pi R^2$

אנחנו מבינים ש: $0\le\Omega\le4\pi$

אם אלמנט השטח שאנחנו מסתכלים עליו נע בין הקור' $\theta_1\le\theta\le\theta_2$ $\quad\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$ (בקור' כדוריות) אז:

$$\Omega=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \implies \Omega_{max}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi=4\pi$$

מקובל לסמן אלמנט זווית מרחבית שמכסה את האיזור (

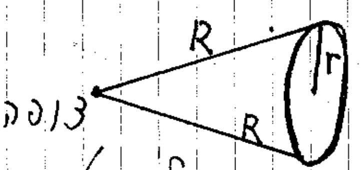
שכן $\begin{cases}[\theta,\theta+d\theta]\\ [\varphi,\varphi+d\varphi]\end{cases} \Longrightarrow \boxed{d\Omega=\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{dA=r^2 d\Omega}$$

דוגמא לחישוב זווית מרחבית

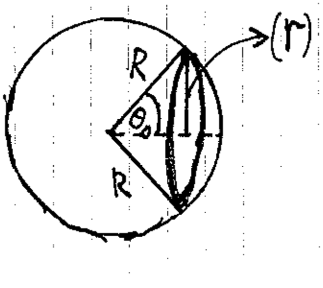
צופה נמצא במרחק R מקצות דיסקה מעגלית ברדיוס r הממוקמת בניצב למבט הצופה. מהי הזווית המרחבית של הדיסקה (ביחס לצופה)?



פתרון:

אם נרשום את האינטגרל במפורש נקבל ביטוי מגעיל מאוד.

במקום זאת, פשוט נשים לב שאנחנו יכולים להחליף את הדיסקה בחלק מקליפה כדורית ברדיוס R, שמכסה את אותה הזווית המרחבית



הזווית θ_0 בציור מקיימת

$$\boxed{\sin\theta_0=\frac{r}{R}}$$

3א):

$$\boxed{\Omega} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_0} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi\int_0^{\theta_0}\sin\theta \, d\theta = \boxed{2\pi(1-\cos\theta_0)}$$

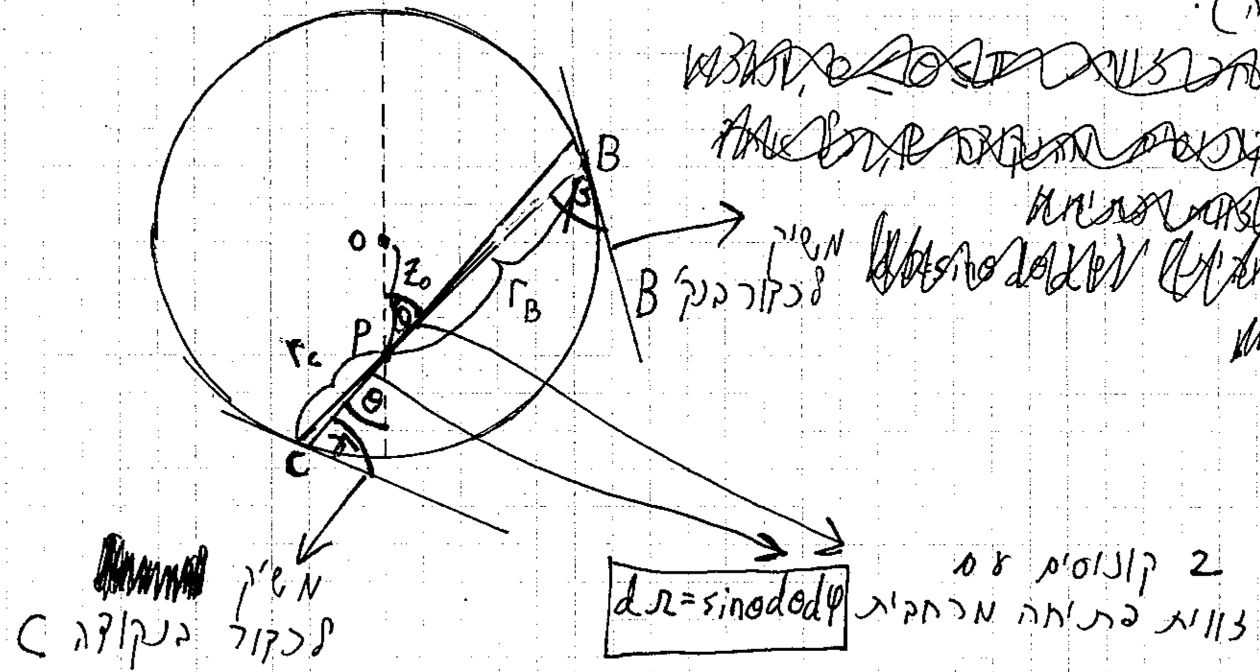
שמים לב שבהכרח $0\le\Omega\le4\pi$ מכיוון ש: $-1\le\cos\theta_0\le1$.

חזרה לשדה בתוך קליפה כדורית טעונה

נניח שרדיוס הכדור R והוא טעון במטען כולל Q. לכן צפיפות המטען המשטחית ע"פ הכדור היא

$$\boxed{\sigma=\frac{Q}{4\pi R^2}}$$

נתבונן בנקודה כלשהי בתוך הכדור, P.
למען הנוחות, נסובב את הכדור כך ש- P נמצאת על ציר Z בגובה Z_0. מסו"ם, $-R<Z_0\le R$ (כתמיד ניתן לעשות זאת).



נבחר זווית $0\le\theta\le\pi$ כך שישר היוצא מהנקודה P בזווית θ ביחס לציר $\hat{z}$ החיובי, אורכו r_B והוא חוצה את הכדור בנקודה B. הישר שיוצא מ- P בזווית θ ביחס לציר $\hat{z}$ השלילי חותך את הכדור בנקודה C ואורכו r_c, כמו בציור למעלה.
נוציא 2 קונוסים שיש להם קודקוד משותף ב- P וזווית הפתיחה (המרחבית) שלהם זהה $d\Omega=\sin\theta d\theta d\varphi$, אחד לעבר הנק' B והשני לעבר C.

חיתוך הקונוסים עם הכדור יוצר 2 אלמנטי שטח קטנים ע"פ הכדור dA_B, dA_c, סביב הנקודות B ו- C בהתאמה. זה מגדיר 2 אלמנטי מטען

$dQ_B = \sigma\cdot dA_B$, $dQ_c = \sigma\cdot dA_c$.

2 מטענים אלה הם בקירוב נקודתיים כאשר $d\Omega$ מאוד קטן (ולכן dA_B, dA_c מאוד קטנים). לכן, השדות שהם יוצרים הם:

$$d\vec{E}_B = \frac{dQ_B}{r_B^2}\left(-\hat{r}_B\right)$$

כאשר $\hat{r}_B$, $\hat{r}_c$ הם וקטורי יחידה שיוצאים מהנקודה P אל עבר הנקודות B ו- C בהתאמה.

$$d\vec{E}_c = \frac{dQ_c}{r_c^2}\left(-\hat{r}_c\right)$$

כמובן שמתקיים $\hat{r}_B = -\hat{r}_c$ מעצם הבנייה.

לכן, 2 הנקודות הנ"ל יתרמו ביחד שדה בנקודה P:

$$\boxed{d\vec{E}_{(\theta)}} = d\vec{E}_B + d\vec{E}_c = \boxed{\sigma\left(\frac{dA_B}{r_B^2} - \frac{dA_c}{r_c^2}\right)\left(-\hat{r}_B\right)}$$

נגדיר את הזווית β בין המיתר BC לבין המשיק לכדור ב- B ואת הזווית γ בין המיתר BC לבין המשיק לכדור ב- C (ראו איור).

נראה שמתקיים:

$$dA_B = \frac{r_B^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\sin\beta}$$

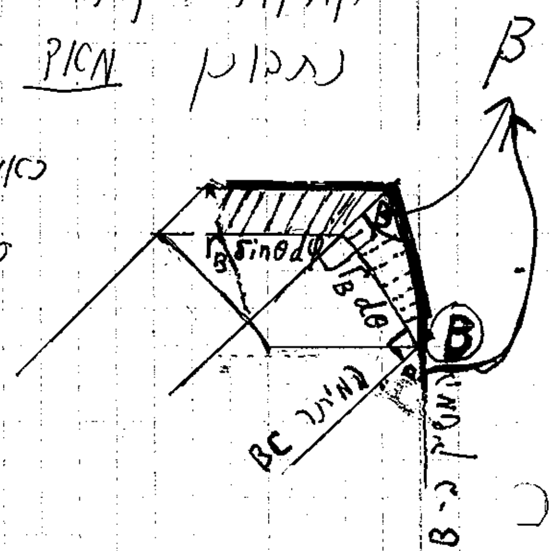
$$dA_c = \frac{r_c^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\sin\gamma}$$

נוכיח עבור dA_B והוכחה עבור dA_c אנלוגית לגמרי.

אם היינו מסתכלים על כדור ברדיוס r_B סביב הנקודה P, אז השטח ע"פ הכדור שמכסה זווית מרחבית $d\Omega$ הוא לפי ההגדרה $dA = r_B^2\, d\Omega = r_B^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$. אבל, אותו

לא מתעניינים בכדור דמיוני שנמצא ברדיוס r_B סביב P,
אלא בשטח ע"פ הכדור המקורי (ברדיוס R סביב O)
שמכסה הקונוס עם זווית פתיחה $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$
וקודקוד בנקודה P.

נתבונן __מאוד__ בקרוב על האזור סביב הנקודה B:



כאמור, השטח ע"פ "הכדור הדמיוני" ברדיוס r_B
סביב P ניתן ע"י $(r_B d\theta)\cdot(r_B \sin\theta d\varphi)$
(שטח מלבן בגבול שבו $d\theta, d\varphi \ll 1$).

לכן, השטח ע"פ הכדור האמיתי (האזור המקווקו באיור) הוא:

$$dA_B = \left(\frac{r_B d\theta}{\sin\beta}\right)\cdot\left(r_B \sin\theta d\varphi\right) = r_B^2 \frac{\sin\theta}{\sin\beta} d\theta d\varphi$$

נציב את dA_B ואת dA_c ונקבל שהשדה בנקודה P
בגלל שני אזורים אלה ע"פ הכדור

$$\boxed{d\vec{E}_{(0)} = \sigma \cdot \sin\theta d\theta d\varphi \left(\frac{1}{\sin\beta} - \frac{1}{\sin\gamma}\right)\left(-\hat{r}_B\right)}$$

אבל, בגלל ש- β ו-γ הינן זוויות בין 2 משיקים לכדור
לבין אותו מיתר, הן שוות זו לזו בגלל משפט גיאומטרי
אודות הזווית בין משיק למיתר במעגל
(הזווית בין משיק למיתר במעגל שווה לזווית היקפית
שנשענת על אותו מיתר).

לכן $\sin\beta = \sin\gamma$ ולכן $d\vec{E}_0 = 0$

כלומר 2 אלמנטי המטען הקטנים dQ_A, dQ_B שנוצרו מחיתוך
2 הקונוסים עם שפת הכדור, יצרו שדות חשמליים ב-P
שמבטלו אחד את השני.

נחזור על טיעון זה לכל $0 \le \theta \le \pi$ ונקבל אוסף של
זוגות של מטענים שיבטלו זה את השדה של זה.

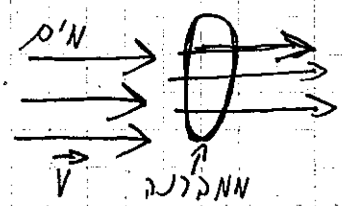
כך נקבל שכוח השדה בנקודה P מתאפס!

<u>מסקנה</u>: מטען q שנמצא בתוך קליפה כדורית
חלולה הטעונה באופן אחיד במטען Q לא ירגיש
שום כוח חשמלי!

(שימו לב שמאותה סיבה בדיוק, חלקיק במסה m שנמצא
בתוך קליפה כדורית עם מסה M המפולגת באופן
אחיד ע"פ הקליפה, לא יחוש שום כוח גרביטציוני!).

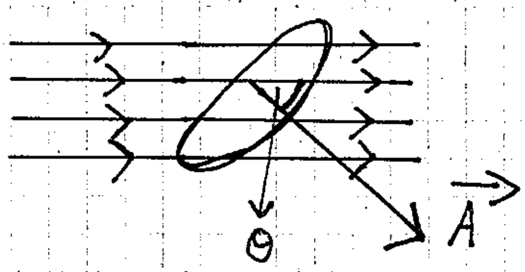
שטף חשמלי וחוק גאוס (האינטגרלי)

שטף של גודל וקטורי כלשהו דרך אלמנט שטח הוא מדד ל"כמות הזורם" (הגודל הוקטורי) שחוצה את המשטח.
דוגמא אינטואיטיבית היא זרימה של מים בצינור.
נניח שמים זורמים בצינור, ושמים ממברנה בצינור, שמאפשרת מעבר של מים, אבל שאנחנו רוצים מדד לכמות המים שחוצים את הממברנה:



I

במקרה הזה, הממברנה ניצבת לזרימה, ולכן כל המים "יחצו" דרך הממברנה, והשטף יהיה פרופורציונאלי לשטח החתך A



II

הפעם, הממברנה יוצרת זווית θ בין האנך אליה לבין הזורם (כוון צינור). עכשיו השטף יהיה קטן יותר, כי פחות אלמנטים של זורם יחצו את הממברנה ברגע נתון.
בגבול שבו $\theta = \frac{\pi}{2}$, כלומר שהממברנה ממש במקביל לזרימה, שום נוזל לא חוצה את הממברנה, אלא רק עובר מעל או מתחת. באופן כללי, השטף הוא פרופורציוני ל:

$$\text{שטף}\quad \Phi \propto V\cdot A\cdot \cos\theta \equiv \vec{V}\cdot\vec{A}$$

כאשר הגדרנו <u>וקטור שטח</u> $\vec{A}$ שגודלו כגודל שטח החתך דרכו מחשבים את השטף וכיוונו <u>החוצה</u> מהמשטח.
ניתן לראות שעבור $\theta=0, \frac{\pi}{2}$ מקבלים את התוצאות הצפויות.

השטף החשמלי מוגדר (דרך אלמנט שטח $d\vec{S}$):

$$\boxed{d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$

כעת נדמיין מעטפת עם שטח S שמכסה נפח מסו"ים V. נדמיין שוב זרימה של מים.
אם אין לי בתוך הנפח ברז פתוח שמוציא מים חדשים או כיור פתוח שמעלים מים קיימים, אז אצפה שכל המים שנכנסים לתוך הנפח גם יצאו ממנו, ללא תוספות או היעלמויות. במילים אחרות, נטו השטף דרך כל המעטפת <u>יתאפס</u>, כי בגלל המכפלה הסקלארית עם $d\vec{S}$, מה שנכנס יקבל תרומה שלילית ומה שיוצא יקבל תרומה חיובית.

הבנו כבר ששדה חשמלי הוא כמו זרם, כאשר "הברזים" הם מטענים חיוביים ו"הכיורים" הם מטענים שליליים.
לכן, כל עוד בנפח מסו"ים אין מטענים, סה"כ השטף החשמלי דרך המעטפת של הנפח חייב להתאפס.

באופן כללי, השטף דרך המעטפת יינתן ע"י <u>חוק גאוס</u>

$$\boxed{\Phi \equiv \underbrace{\oiint_S d\Phi}_{} = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi K Q_{inside} = \frac{Q_{inside}}{\varepsilon_0}}$$

אינטגרל משטחי על כל המעטפת

כאשר $\boxed{Q_{inside} \equiv \iiint_V \rho(\vec{r})\, d^3r}$

זה סה"כ המטען בתוך המעטפת (בתוך הנפח שהמעטפת עוטפת), ($\rho(\vec{r})$ זו צפיפות המטען)

כפי שנראה, חוק זה חשוב ביותר ומאפשר לחשב בקלות שדות שנובעים מפיזורות מורכבות יחסית.

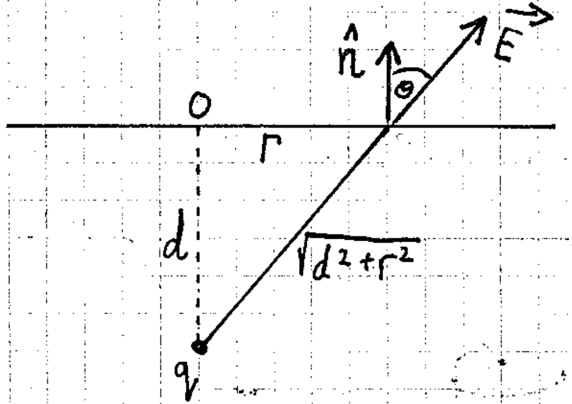
דוגמא I:

נתון מטען נקודתי q הנמצא במרחק d ממישור אינסופי.
מצאו את השטף של השדה החשמלי דרך המשטח:

(א) בעזרת אינטגרציה ישירה

(ב) תוך שימוש במשפט גאוס.

פתרון



נסמן את הנקודה במישור הקרובה ביותר למטען הנקודתי ע"י O. מרחק הנקודה הזו מהמטען הוא d.
נחלק את המישור לטבעות דקות סביב נקודה זו.
מסימטריית הבעיה, עבור כל הנקודות השייכות לטבעת מסויימת בחלוקה, גודל השדה יהיה קבוע ושווה ל: $|\vec{E}| = \frac{kq}{d^2+r^2}$

וקטור השטח המייצג טבעת ברדיוס r ובעובי dr הוא:

$d\vec{S} = 2\pi r\cdot dr\cdot \hat{n}$ ($\hat{n}$ הוא וקטור שניצב למישור האינסופי שלנו ומכוון החוצה מהמטען)

$$\Downarrow$$

$$d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{kq}{d^2+r^2}\cdot 2\pi r dr\cdot\cos\theta = 2\pi kq\,\frac{r dr}{d^2+r^2}\cdot\frac{d}{\sqrt{d^2+r^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{d\Phi = 2\pi kqd\cdot\frac{r dr}{(d^2+r^2)^{3/2}}}$$

לכן השטף הכולל הוא:

$$\boxed{\Phi} = \int d\Phi = \int_0^{\infty} 2\pi kqd \frac{r\,dr}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

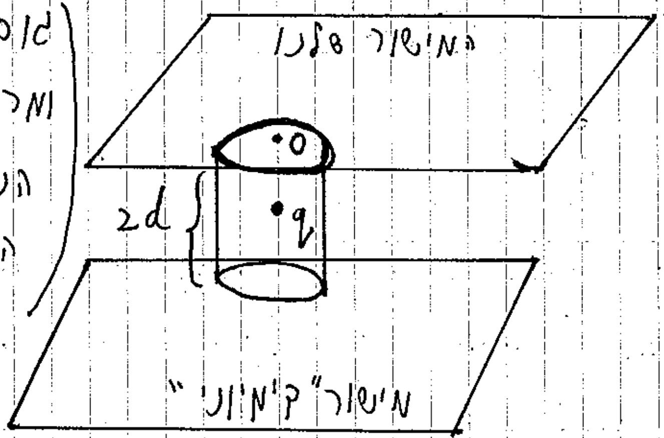
$$= \pi kqd \cdot \frac{(r^2+d^2)^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{2\pi kqd}{\sqrt{d^2}} = \boxed{2\pi kq}$$

בדיקת יחידות:

$$[\phi] = [E\cdot S] = [E]\cdot[r^2] = [kq] \checkmark$$

כעת נשתמש בחוק גאוס. נבנה מעטפת גאוס גלילית כמתואר בציור

(גובה הגליל $2d$ ומרכזו במטען q. הנקודה O בבסיס העליון ורדיוסו R.)



מסימטריה, השטף דרך ~~[illegible]~~ הבסיס העליון שווה לשטף דרך הבסיס התחתון. לכן, לפי גאוס:

$$4\pi kq = 2\cdot\Phi_{base} + \Phi_{surround}$$

אנחנו מעוניינים בשטף דרך המישור, שמתלכד עם הבסיס:

$$\Phi_{base} = 2\pi kq - \frac{1}{2}\Phi_{surround}$$

כאשר $\phi_{surround}$ זה השטף דרך המעטפת הגלילית. עקרונית

זה מסובך לחשב במדויק את השטף דרך משטח זה מכיוון שהשדה $\vec{E}$ לא קבוע על פני המעטפת.

אבל, מכיוון שמרכז המעטפת הוא הכי קרוב למטען על פני המעטפת (כלומר הטבעת שהיא באותו גובה כמו המטען, לא למעלה או למטה), נסיק שהשדה בטבעת מרכזית

זה הוא מקסימלי. כמו כן, רק בטבעת המרכזית $\vec{E}$
ו-$\vec{ds}$ הם באותו כיוון. בכל גובה $h\neq 0$ מהמטען, יש
זווית $\theta>0$ בין כיוון השדה וכיוון הנורמל למעטפת
הגלילית.

2 טיעונים אלה ביחד אומרים לנו שבכל נקודה ע"פ
המעטפת הגלילית:

$$\vec{E}\cdot\vec{ds}\leqslant |E_{center}|\cdot ds$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi_{surround}=\oiint\vec{E}\cdot\vec{ds}\leq\oiint|E_{center}|\,ds=\oiint\frac{Kq}{R^2}\,ds=$$

$$=\int_{-d}^{d}\int_{0}^{2\pi}\frac{Kq}{R^2}\cdot\underbrace{R\,d\varphi\cdot dz}_{(ds)}=\frac{4\pi Kqd}{R}\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

הכי המישור אינסופי

לכן במקרה של גליל ברדיוס אינסופי, השטף יוצא כולו
דרך הבסיסים ולא דרך המעטפת.

~~[illegible]~~

(למעשה בגלל ששטח המעטפת גדל כמו $S\propto R$
אבל עוצמת השדה קטנה כמו $E\propto\frac{1}{R^2}$
השטף קטן לאפס בגבול $R\to\infty$, אבל שימו לב שעבור כדור
ברדיוס אינסופי טענה זו לא נכונה שכן $S\propto R^2$ ולכן
נקבל שטף קבוע שלא תלוי ברדיוס).

בסוף קיבלנו:

$$\boxed{\Phi_{base}}=2\pi Kq-\frac{1}{2}\Phi_{surround}\longrightarrow\boxed{2\pi Kq}$$

כנדרש

דוגמא 2

כדור טעון במטען Q ורדיוס R, צפיפות המטען שלו הוא: $\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$ כאשר $n > -3$. מהו השדה החשמלי בכל נקודה במרחב?

פתרון

בכדור מהסימטריה של הבעיה שהשדה יכול להיות רק רדיאלי נבחר מעטפת גאוס כדורית על מנת למצוא את השדה.

מעטפת כזו ברדיוס r תתן שטף של: $\phi = 4\pi r^2 \cdot E(r)$

מכיוון שהשדה:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{r}}$$

בגלל הסימטריה

והשטח:

$$\boxed{d\vec{s} = r^2 d\Omega\,\hat{r} = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\,\hat{r}}$$

המטען בתוך המעטפת יהיה:

$$Q(r) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \rho(r)\cdot r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = 4\pi \frac{\rho_0}{r_0^n}\int_0^{\min(R,r)} r^n \cdot r^2 dr$$

(את האינטגרל dr לוקחים עד r אם $r<R$ בתוך הכדור, אבל רק עד R אם $r>R$ מחוץ לכדור)

מהתנאי כי $n > -3$ ניתן לבצע את האינטגרל ולקבל:

$$\boxed{Q(r) = \frac{4\pi}{n+3}\frac{\rho_0}{r_0^n}\left[\min(r,R)\right]^{n+3}}$$

מכיוון שנתון שעבור רדיוס R המטען הכולל הוא Q ניתן לרשום:

$$\boxed{Q(r) = Q\cdot\left(\frac{\min(r,R)}{R}\right)^{n+3}}$$

נציב זאת בחוק גאוס ונקבל:

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi K Q(r)$$
$$\Downarrow$$
$$E(r) = \frac{KQ(r)}{r^2} \Rightarrow$$

כלומר השדה נובע רק מהמטענים שבתוך הקליפה (פנימית ל- r) ולא מהקליפות שחיצוניות ל- r (כפי שהוכחנו מקודם), וצורת השדה זהה לשדה של מטען נקודתי בגודל $Q(r)$ שנמצא בראשית. כלומר כאילו לקחנו את כל המטען שפנימית ל- r ומרכזנו אותו למטען נקודתי בראשית.

בסוף נקבל:

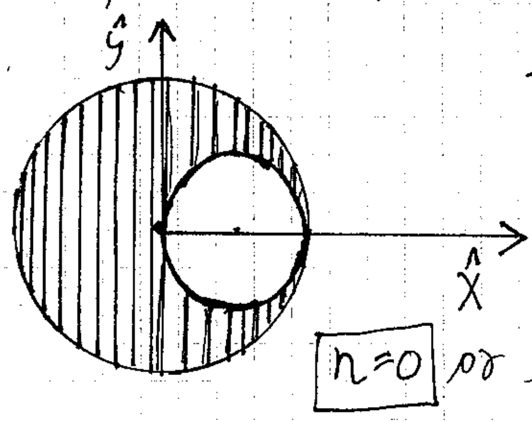
$$\boxed{\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{KQ}{r^2}\cdot\hat{r} & r>R \\ \frac{KQ}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}\cdot\hat{r} & r<R \end{cases}}$$

קושיה 3

מכדור ברדיוס R המלא בצפיפות מטען נפחית ρ הוציאו כדור ברדיוס $\frac{1}{2}R$, המשיק לשפת הכדור. מהו השדה החשמלי בכל המרחב?

פתרון:

נסמן שמרכז הכדור הגדול הוא בראשית הצירים, ומרכז הכדור שהוצא נמצא ב- $\frac{R}{2}\hat{x}$



הכדור טעון בצורה אחידה ולכן:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3}R^3} = const$$

שזה מקרה פרטי של השאלה הקודמת עם $\boxed{n=0}$

• בתוך כדור מלא כזה מתקיים $\vec{E} = K\frac{Q}{r^3}\vec{r}$

• ומחוץ לכדור כזה $\vec{E} = K\frac{Q}{R^3}\vec{r}$

אל המקרה הנוכחי אפשר להתייחס כמו כדור ברדיוס R סביב הראשית עם צפיפות ρ ועליו כדור נוסף ברדיוס $R/2$ סביב הנקודה $\frac{R}{2}\hat{x}$ עם צפיפות מטען $(-\rho)$.

אם כך, השדה שנקבל מחוץ לשני הכדורים:

$$\boxed{\vec{E}_{out} = K\frac{Q}{r^3}\vec{r} - K\frac{Q}{8}\frac{(\vec{r}-\frac{R}{2}\hat{x})}{\left|\vec{r}-\frac{R}{2}\hat{x}\right|^3}}$$

(מטען הכדור השלילי הוא: $Q' = -\rho\cdot\frac{4\pi}{3}\left(\frac{R}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}\frac{4\pi}{3}R^3\rho = -\frac{Q}{8}$)

השדה בתוך הכדור הגדול ומחוץ לקטן (כלומר בתוך הגוף האמיתי) הוא:

$$\boxed{\vec{E}_{in} = K\frac{Q}{R^3}\vec{r} - K\frac{Q}{8}\frac{(\vec{r}-\frac{R}{2}\hat{x})}{\left|\vec{r}-\frac{R}{2}\hat{x}\right|^3}}$$

ולבסוף, בתוך הכדור הקטן:

$$\vec{E}_{hollow} = K\frac{Q}{R^3}\vec{r} - K\frac{Q}{8}\frac{(\vec{r}-\frac{R}{2}\hat{x})}{\left(\frac{R}{2}\right)^3} =$$

$$\boxed{\vec{E}_{hollow} = \frac{KQ}{2R^3}\hat{x} = const}$$

בתוך האזור החלול השדה הוא קבוע בגודלו ובכיוונו.