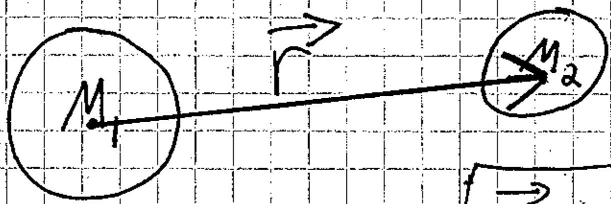
מכניקה קלאסית - תרגול 2

הבעיה הקפלרית בגרביטציה

אנו דנים בבעיה שיש רק 2 גופים בכל היקום שעוברים אינטרקציה גרביטציונית ביניהם.



נסמן $\boxed{\vec r = \vec r_2 - \vec r_1}$ את הוקטור היחסי בין 2 המסות.

הכוח שפועל על כל מסה הוא:

$$\vec F_2 = -\frac{GM_1M_2}{r^2}\hat r = M_2\ddot{\vec r}_2$$

$$\vec F_1 = +\frac{GM_1M_2}{r^2}\hat r = M_1\ddot{\vec r}_1$$

מכיוון שהמערכת היא סגורה (אין עוד גופים ביקום מלבד שני אלה) נקבל שהתנע הכולל של המסות קבוע:

$$\vec P = m_1\vec V_1 + m_2\vec V_2 = const$$

לכן, מרכז המסה של הגופים נע במהירות קבועה:

$$\vec V_{cm} = \frac{m_1\vec v_1 + m_2\vec V_2}{M_1+M_2} = Const$$

נרצה לנצל את העובדה הזו ע"י כך שנעבור למערכת אינרציאלית שנעה עם מרכז המסה. קה"ע, נקבע את ראשית הצירים שלנו להתלכד עם מרכז המסה של הגופים.

במערכת זו מתקיים:

$$\vec R_{cm} = \frac{m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2}{m_1+m_2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec r = \frac{m_1+m_2}{m_1}\vec r_2 \Longleftarrow \boxed{\vec r_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec r_2}$$

כאשר אנו כותבים את הכל במערכת המיוחסת
הזו (מערכת מרכז המסה) הכל נעשה הרבה יותר
פשוט. במקום לפתור עבור 2 הוקטורים $\vec{r}_1, \vec{r}_2$,
נוכל לפתור רק עבור וקטור יחסי $\vec{r}$.

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{r}}_2\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) = \frac{m_1+m_2}{m_1}\ddot{\vec{r}}_2 = \frac{m_1+m_2}{m_1}\cdot\frac{-GM_1}{r^2}\hat{r}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mu\ddot{\vec{r}}} \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1+M_2}\ddot{\vec{r}} = -\frac{G\overbrace{M_1M_2}^{\mu\cdot(M_1+M_2)}}{r^2}\hat{r}\ \boxed{=\vec{F}}$$

קיבלנו שהוקטור היחסי בין 2 המסות מתנהג קינמטית
בדיוק כמו חלקיק נקודתי בעל מסה $\boxed{\mu = \frac{M_1M_2}{M_1+M_2}}$ (המסה
המצומצמת) שנע תחת כוח השווה בגודלו לכוח הגרביטציה
בין 2 החלקיקים המקוריים M_1, M_2.

(μ נע תחת כוח משיכה של (M_1+M_2)

קל מאוד להראות בנוסף שמתקיים:

$$\boxed{\vec{L}} = m_1\vec{r}_1\times\vec{v}_1 + m_2\vec{r}_2\times\vec{v}_2 = m_1\vec{r}_1\times\vec{v}_1 - m_1\vec{r}_1\times\vec{v}_2 =$$

$$= m_1\vec{r}_1\times(\dot{\vec{r}}_1-\dot{\vec{r}}_2) = m_1\cdot\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = \boxed{\mu\vec{r}\times\vec{v}}$$

כלומר התנ"צ של המערכת הכוללת הוא בדיוק התנ"צ
של המסה המצומצמת μ בקורדינטה היחסית $\vec{r}$.
(שימו לב שתוצאה זו כלל לא תלויה בכוח הגרביטציה,
אלא רק במעבר למרכז המסה).

כמו כן האנרגיה הכוללת של המערכת היא פשוט:

$$E = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2} - \frac{GM_1M_2}{r} = \ldots =$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^{\,2} - \frac{GM_1M_2}{r} = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^{\,2} - \frac{G\mu\cdot(M_1+M_2)}{r}}$$

קיבלנו אנרגיה של חלקיק עם מסה μ ומהירות $\dot{\vec{r}}$
שנע בפוטנציאל הגרביטציוני של המסות: $U = -\frac{GM_1M_2}{r} = -\frac{G\mu(M_1+M_2)}{r}$

לסיכום, אז כך שעברנו למערכת מרכז המסה,
הצמצמנו לבעיה של חלקיק יחיד עם מסה μ שמתאר
את הוקטור היחסי בין 2 המסות האמיתיות. על חלקיק זה
פועל כוח הזהה לכוח האמיתי בין M_1 ל M_2, והתנ"ז שלו
זהה לתנ"ז של המערכת האמיתית וגם האנרגיה הכוללת שלו
זהה לאנרגיה הכוללת האמיתית!
וכל זה ללא כל קשר לכוח עצמו! זה משהו שתמיד
ניתן לעשות כשמטפלים בבעיית 2 גופים!

כעת, נחזור לבעיה המקורית וננצל כמה תכונות של הכוח
הפועל בין המסות: $\vec{F}_1 = +\frac{GM_1M_2}{r^2}\hat{r}$, $\vec{F}_2 = -\frac{GM_1M_2}{r^2}\hat{r}$

הכוח הינו: (א) משמר (ב) רדיאלי
לכן יש שימור של (א) אנרגיה (ב) תנ"ז

כלומר:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - \frac{G\mu(M_1+M_2)}{r} = const$$

$$\vec{L} = \mu\vec{r}\times\vec{v} = const$$

מכך שהמכפלה הוקטורית $\vec{r}\times\vec{v} = const$ נסיק שהמישור
שמכיל את 2 הוקטורים אינו משתנה בזמן (נזכור
שכיוון וקטור המכפלה הוקטורית הוא ניצב למישור שנפרש
ע"י 2 הוקטורים). כלומר התנועה של $\vec{r}$ מוגבלת
למישור!

נגדיר מישור זה להיות מישור $x-y$ ונקבל כי

$$\boxed{V_z = 0}$$

לכן, בקורדינטות פולריות במישור:

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{r} = r\hat{r}\ , \quad \dot{\hat{r}} = \dot{\varphi}\hat{\varphi} \perp \hat{r} \\ \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi} \end{array}\right.$$

(פיתחנו בתרגול מספר 3)

$$\Downarrow$$

$$\vec{L} = \mu\,\vec{r}\times\vec{v} = \mu r^2\dot{\varphi}\,\hat{z} = const$$

ומעתה נתעלם מכיוון $\hat{z}$ ונקבל:

$$\boxed{L = \mu r^2\dot{\varphi} = const}$$

אם עוד נשים לב ש:

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{\mu^2 r^2}$$

נקבל ביטוי שימושי יותר עבור האנרגיה:

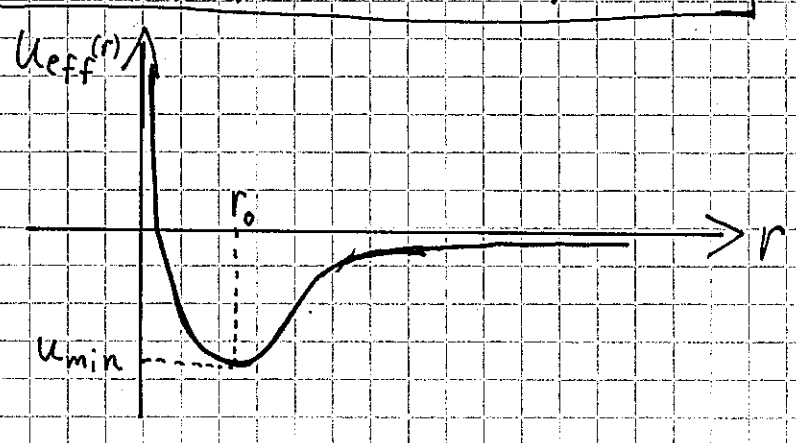
$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{GM_1M_2}{r} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \left(\frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM_1M_2}{r}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{eff}(r) = const}$$

שזו בעצם האנרגיה של חלקיק עם מסה μ המבצע תנועה <u>חד מימדית</u> עבור פוטנציאל

$$\boxed{U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM_1M_2}{r}}$$



פתרתם בג'ק זו בכיתה ומצאתם את צורת
המסלול של הוקטור היחסי:

$$\boxed{r(\varphi) = \frac{r_0}{1+\varepsilon\cos(\varphi)}}$$

כאשר:

$$\varepsilon = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{(GM_1M_2)^2\mu}}$$

$$r_0 = \frac{L^2}{(GM_1M_2)\cdot\mu}$$

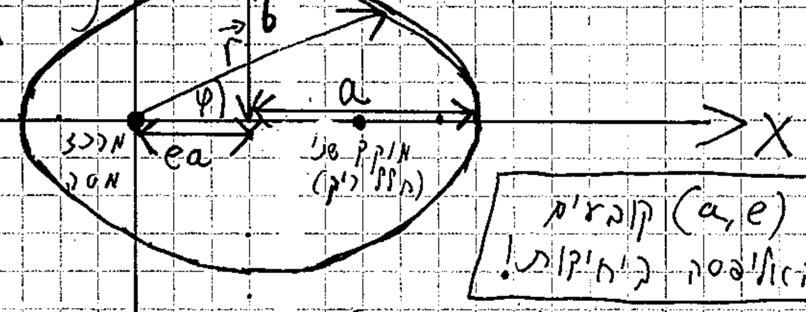
(נק' המינימום של $U_{eff}(r)$)

רואים ששני "קבועי האינטגרציה", כלומר הפרמטרים
ε ו־r_0 שקובעים את התנועה נקבעים לחלוטין ע"י
2 הקבועים שמצאנו מקודם: האנרגיה E והתנ"ז L.
ברגע שקבענו את האנרגיה והתנ"ז, קבענו את כל
התנועה!

מסלולים סגורים (אם $0\le e<1$)

רואים עוד שהמשוואה $r(\varphi)$ מתארת אליפסה
במישור $(x\text{-}y)$ בקורדינטות פולאריות כאשר ראשית
הצירים נמצאת על אחד ממוקדי האליפסה.
אם נזכור שהגדרנו את ראשית הצירים להתלכד
עם מרכז המסה של M_1, M_2 הרי שקיבלנו שהקורדינטה
$\vec{r}$ מבצעת תנועה אליפטית כאשר
מרכז המסה נמצא באחד המוקדים!

$$\boxed{r(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}}$$



a semi-major axis
b semi-minor axis
$e = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ eccentricity ($0\le e<1$)

הזוג (a,e) קובעים את האליפסה ביחידות!

כלומר, אם האנרגיה הכוללת היא <u>שלילית</u>, כלומר המצב הוא קשור והמסות לא תברחנה לאינסוף, אז הוקטור $\vec{r}$ מבצע תנועה אליפטית עם

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{eccentricity: } \varepsilon \\ \text{semi-major-axis: } a = \dfrac{r_0}{1-\varepsilon^2} \end{array}}$$

תנועה מעגלית זו
מקרה פרטי עבור $\varepsilon=0$

איך נראית תנועת המסות האמיתית?

הצלחנו לפתור את הבעיה עבור $\vec{r}_{(0)}$, אבל מה שבאמת מעניין אותנו זה המסלולים של $\vec{r}_1$ ו- $\vec{r}_2$.

נזכור כי:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{r}_1 = -\dfrac{M_2}{M_1+M_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = +\dfrac{M_1}{M_1+M_2}\vec{r} \end{array}}$$

$\vec{r}_2$ מקביל ל- $\vec{r}$ בכל רגע $(\varphi_2=\varphi)$

$\vec{r}_1$ אנטי-מקביל ל- $\vec{r}$ בכל רגע $\boxed{(\varphi_1=\varphi+\pi=\varphi_2+\pi)}$

$$r_1(\varphi_1) = \frac{\left(\frac{M_2}{M_1+M_2}\cdot a\right)(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos(\varphi_1)}$$

בכל זמן t

$$\boxed{\varphi_1(t)=\varphi_2(t)+\pi}$$

$$r_2(\varphi_2) = \frac{\left(\frac{M_1}{M_1+M_2}\cdot a\right)(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos(\varphi_2)}$$

$\Leftarrow$ גם $\vec{r}_1$ וגם $\vec{r}_2$ נעים באליפסה עם eccentricity זהה
$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$, אבל semi-major-axis שונה:

$$\boxed{a_1 = \frac{M_2}{M_1+M_2}a \qquad a_2 = \frac{M_1}{M_1+M_2}a \quad , \quad a_1+a_2=a}$$

נשים לב שמתקיים בכל זמן t:

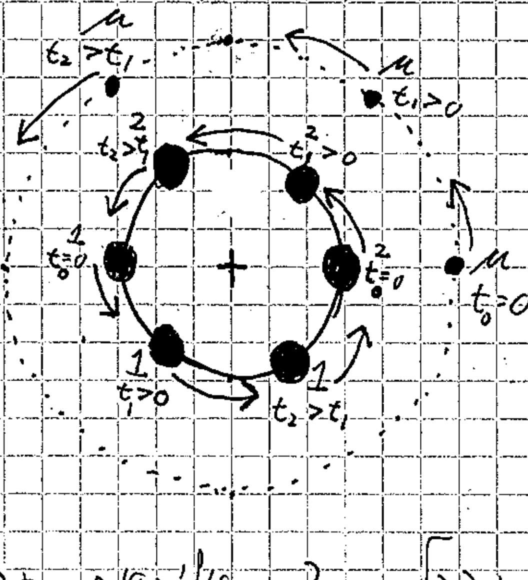
$$\boxed{\frac{r_1(t)}{r_2(t)} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{M_2}{M_1}}$$

מקרה I: $M_1=M_2=M$, למשל זוג כוכבים בינאריים שווי מסה (כוכבים בינאריים הם זוגות של שמשות הקשורות זו לזו גרביטציונית ומסתובבות סביב מרכז מסה משותף).
מתברר כי רוב הכוכבים ביקום באים בזוגות כאלה.

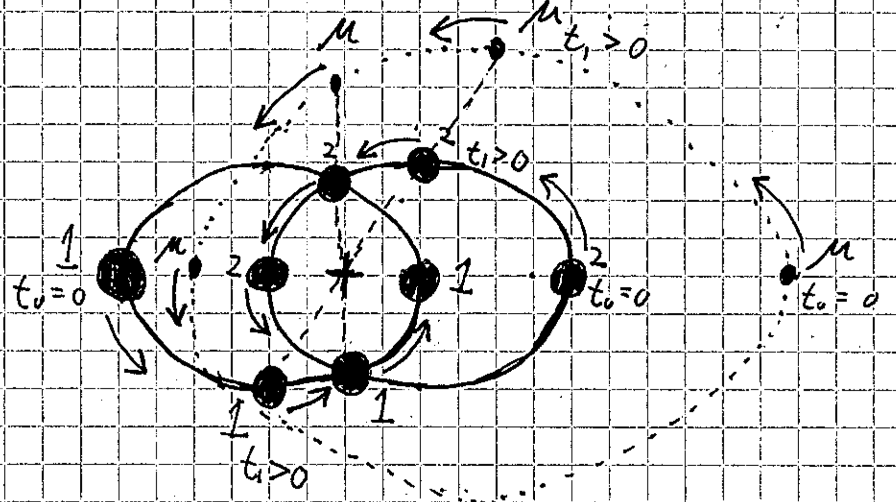
במקרה כזה:

$$\boxed{\begin{aligned} \mu &= \frac{M^2}{2M} = \frac{1}{2}M \\ \vec{r} &= -2\vec{r}_1 = +2\vec{r}_2 \\ a &= 2a_1 = 2a_2 \end{aligned}}$$

עבור $\varepsilon=0$ נקבל תנועה מעגלית של 2 המסות, באותו רדיוס סביב מרכז משותף שהוא מרכז המסה. המסה הרדוקטיבית μ "מסתובבת" בתנועה מעגלית ברדיוס כפול.



עבור $1>\varepsilon>0$ נקבל 2 אליפסות עם מוקד משותף, eccentricity זהה, וגם semi-major-axis זהה, אבל שהמוקד הימני של אחת מהן הוא המוקד השמאלי של השני.
המסה המצומצמת μ "נעה" לאורך אליפסה עם אותה אקסצנטריות ואותו המוקד, אבל גדולה פי 2



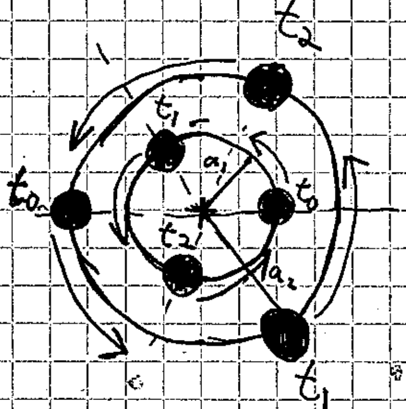
מקרה II: $M_2 < M_1$, אבל לא בהמון.

גם אופייני לכוכבים בינאריים.

2 המסות עדיין תסתובבנה סביב מרכז המסה המשותף

אבל הפעם . $a_1 = \frac{M_2}{M_1} a_2 < a_2$

עבור $\varepsilon = 0$:



מקרה III: $M_2 \ll M_1$. זה המקרה הנפוץ במערכת השמש, כמו בכדור הארץ+ירח (או כל פלנטה + ירחים שלה).

במקרה הזה:

$$\vec{r}_1(t) = -\frac{M_2}{M_1+M_2}\vec{r} \simeq 0$$

$$\vec{r}_2(t) = \frac{M_1}{M_1+M_2}\vec{r} \simeq \vec{r}$$

$$\mu = \frac{M_1 \cdot M_2}{M_1+M_2} \simeq M_2$$

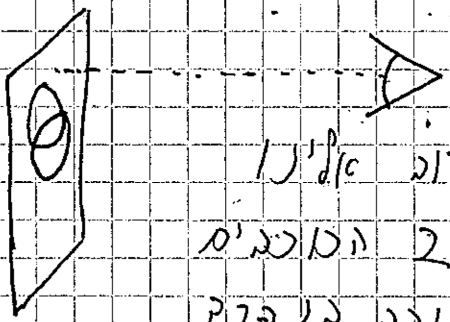
$\longrightarrow$ מרכז המסה בקירוב טוב נמצא בתוך המסה הגדולה.

לכן M_1 לא זזה כמעט.

תנועת M_2 מתלכדת כמעט בדיוק עם תנועת המסה המצומצמת μ, והיא זזה סביב M_1.

מדידת מסות של זוגות בינאריים של כוכבים

(1) נניח זוג בינארי שמישור התנועה שלהם ניצב לכיוון הראייה שלנו מכדוה"א.



נניח עוד כי הזוג מספיק קרוב אלינו כך שאנו מסוגלים להפריד בין 2 הכוכבים ולראות את המסלול של כל כוכב בנפרד סביב מרכז המסה.

כך הצלחנו למדוד את זמן המחזור של התנועה T ואת המרחק הזוויתי על כיפת השמיים של הצירים הראשיים של 2 האליפסות α_1, α_2.

(א) קבלו ביטוי ליחס המסות $\frac{m_1}{m_2}$

(ב) אם גם המרחק אל הזוג, d, ידוע, מהם m_1, m_2?

$\Leftarrow$ (א) אם המרחק אל הזוג הוא d, אז המרחק האמיתי של הצירים הראשיים (אורך הקשת על כיפת השמיים) שווה ל- $a_{1,2} = d\cdot\alpha_{1,2}$ (α מייצג זווית על כיפת השמיים). לכן:

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2}} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = \boxed{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$$

קבלנו מקודם.

(ב) אם גם d ידוע, אז נוכל לקבל מפורשות את הצירים הראשיים a_1, a_2. מחוק השלישי של קפלר:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}a^3 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}(a_1+a_2)^3$$

$$\boxed{m_1+m_2 = \frac{4\pi^2(a_1+a_2)^3}{G\cdot T}}\ ,\quad \boxed{m_1 = \frac{a_2}{a_1}\cdot m_2}$$

$$m_2 = \frac{4\pi^2}{GT} \cdot a_1 (a_1+a_2)^2$$

$$m_1 = \frac{4\pi^2}{GT} a_2 (a_1+a_2)^2$$

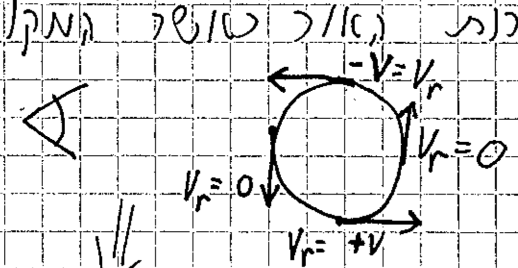
ומכאן:

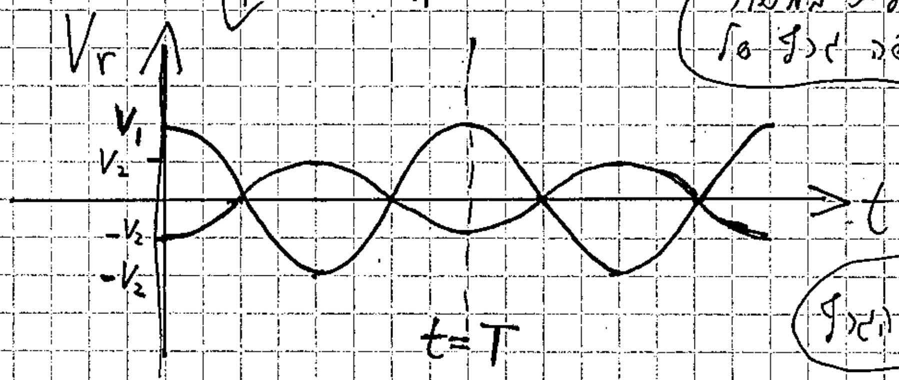
(2) נניח כעת מקרה הפוך, שבו מישור התנועה מתלכד עם מישור הראייה:

ושאנחנו לא מסוגלים להפריד ויזואלית בין 2 הכוכבים ⊛

נניח כי מסלולי הכוכבים בקירוב טוב מעגליים $(\varepsilon \ll 1)$ בעקבות אינטראקציות של גאות ושפל בין הכוכבים (כמו תרגיל בית 11 שאלה 5). לכן מהירויות הסיבוב של הכוכבים קבועות: V_1, V_2

כל מה שביכולתנו למדוד זה את מהירות ההתקרבות או התרחקות של הכוכבים מאיתנו, וזה באמצעות אפקט דופלר, שמשנה את תדירות האור כאשר המקור מתקרב או מתרחק:





עבור תנועה מעגלית במישור הראייה, מקבלים פה גרף של sin/cos מושלם.

עבור תנועה אליפטית או תנועה שלא במישור, הגרף מתעוות

⊛ ניתן בכל זאת להסיק שמדובר בזוג כוכבים לפי ספקטרום הפליטה שלהם. לא ניכנס לזה.

בנוסף כך מקבלים את זמן המחזור T ואת מהירויות הסיבוב V_1, V_2.

בתנועה מעגלית $\Leftarrow$ $V_i = \frac{2\pi a_i}{T}$

$$\Downarrow$$

$$a_i = \frac{V_i \cdot T}{2\pi} \Rightarrow \boxed{(a_1+a_2) = a = \frac{T}{2\pi}(V_1+V_2)}$$

(כאן, a_i זה רדיוס המעגל)

לפי החוק השלישי:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}a^3 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}\cdot\frac{T^3}{8\pi^3}(V_1+V_2)^3$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} M_1+M_2 &= \frac{T}{2\pi G}(V_1+V_2)^3 \\ \frac{M_1}{M_2} &= \frac{a_2}{a_1} = \frac{V_2}{V_1} \end{aligned}}$$

מסלולים פתוחים

הפתרון הכללי עבור תנועת המסה המצומצמת μ היה:

$$r(\varphi) = \frac{r_0}{1+\varepsilon\cos(\varphi)}$$

$$r_0 = \frac{L^2}{(GM_1M_2)\mu}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{(GM_1M_2)^2\mu}}$$

קיבלנו על מסלולים סגורים המתקבלים עבור $\varepsilon<1$, דהיינו עבור $E<0$ דהיינו עבור מצב קשור עם r_{min} ו- r_{max}.

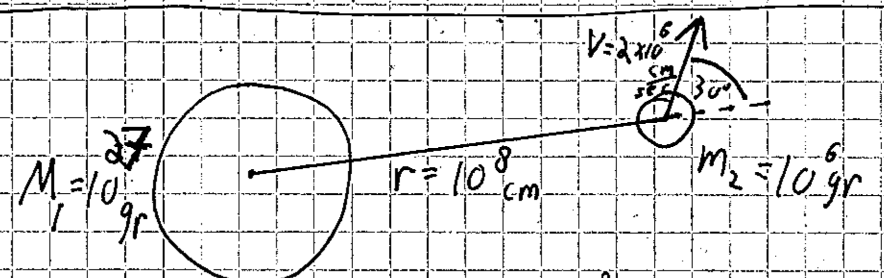
עבור מצב לא קשור, נקבל $0<E$ (למשל אם מהירות אחד הגופים גבוהה ממהירות הבריחה מהגוף השני, נקבל סה"כ אנרגיה חיובית) וזה יוביל לאקסצנטריות $\varepsilon>1$.

המשוואה $r(\varphi)=\frac{r_0}{1+\varepsilon\cos(\varphi)}$ עבור $\varepsilon>1$

מתארת היפרבולה.

כאשר $\cos(\varphi)=-\frac{1}{\varepsilon}$ נקבל $r(\varphi)\to\infty \Rightarrow$ מצב לא קשור.

(I)



(א) מהי האקסצנטריות של המסלול ε?

(ב) האם הגוף הנדון קשור לכוכב (האם המסלול סגור)?

$\Leftarrow$ נשים לב שאנחנו בגבול שבו $\frac{m_2}{M_1}\ll 1$. לכן, כפי שראינו M_1 נשארת בקירוב במקומה ואילו m_2 נעה ביחד עם μ.

$$\boxed{L}=\mu\vec{r}\times\vec{v}=\mu r v\sin(30^\circ)\simeq 10^6\cdot10^8\cdot2\times10^6\cdot\frac{1}{2}\boxed{=10^{20}_{\text{erg}\cdot\text{sec}}}$$

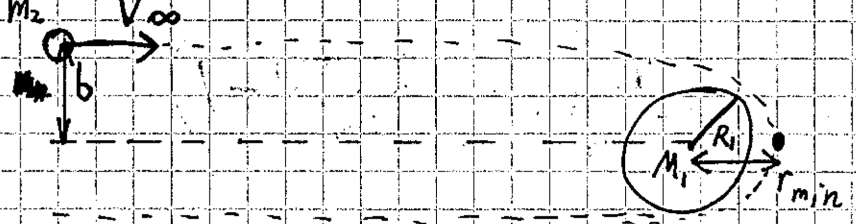
$$E=\frac{1}{2}\mu\vec{v}^2-\frac{GM_1M_2}{r}\simeq\frac{1}{2}\cdot10^6\cdot(2\times10^6)^2-\frac{6.67\times10^{-8}\cdot10^{27}\cdot10^6}{10^8}$$

$\Downarrow$

$\boxed{E\simeq1.3\times10^{18}\,\text{erg}}\Rightarrow E>0\Rightarrow$ מצב לא קשור!

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{(GM_1M_2)^2\mu}}\simeq\sqrt{1+\frac{2.6\times10^{18}\cdot10^{40}}{(6.67\times10^{-8}\cdot10^{27}\cdot10^6)^2\,10^6}}$$

$$\boxed{\varepsilon\simeq2.6}$$



II

מסה m_2 מגיעה מהאינסוף עם מהירות V_∞ ונעה במסלול היפרבולי אל עבר כוכב במסה $M_1 \gg m_2$ וברדיוס R_1.

א) מהו r_{min}, המרחק המינימאלי $(M_1 - N)$ שאליו יגיע m_2?

ב) האם m_2 יפגע ב-M_1?

$\Longleftarrow$ בבעיה יש שימור האנרגיה ותנ"ז.

במצב התחלתי:

$$L = m_2 V_\infty \cdot b$$

$$E = \frac{m_2 V_\infty^2}{2} \quad (U_\infty = 0)$$

בנקודה הקרובה ביותר r_{min}, מתקיים $\dot{r}=0$ ולכן המהירות היא בכיוון המשיקי בלבד $\Longleftarrow$

$$L = m_2 \vec{r}_{min} \times V = m_2 r_{min} V$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{m_2} V_\infty b = \cancel{m_2} r_{min} \cdot V \Longrightarrow \boxed{V = V_\infty \cdot \frac{b}{r_{min}}}$$

$$E = \frac{1}{2} m_2 V^2 - \frac{G M_1 m_2}{r_{min}} = \frac{1}{2}\cancel{m_2}\left(V_\infty \frac{b}{r_{min}}\right)^2 - \frac{G M_1 \cancel{m_2}}{r_{min}} = \frac{\cancel{m_2} V_\infty^2}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{V_\infty^2 b^2}{r_{min}^2} - \frac{2 G M_1}{r_{min}} = V_\infty^2$$

$$\Downarrow$$

$$r_{min}^2 \cdot V_\infty^2 + r_{min} 2 G M_1 - V_\infty^2 b^2 = 0$$

$$r_{min} = \frac{-2 G M_1 \pm \sqrt{4 G^2 M_1^2 + 4 V_\infty^4 b^2}}{2 V_\infty^2}$$

$$\cancel{r_{min} =} \qquad \boxed{r_{min} = \frac{GM_1}{V_\infty^2}\left(\sqrt{1+\left(V_\infty^2 \cdot \frac{b}{GM_1}\right)^2} - 1\right)}$$

לחילופין, לאחר שמצאנו את E, L מוצאים את

r_0, ε וכך $r_{min} = \dfrac{r_0}{1+\varepsilon}$ ומקבלים את

אותה התוצאה.

ב) האסטרויד יפגע בכוכב אם"ם $r_{min} \le R_1$

בהינתן b או V_∞, נקבל תנאי על הגודל השני

$$1+\left(V_\infty^2 \cdot \frac{b}{GM_1}\right)^2 \le \left(\frac{R_1}{GM_1} \cdot V_\infty^2 + 1\right)^2 = 1 + \frac{2R_1}{GM_1} \cdot V_\infty^2 + \left(\frac{R_1}{GM_1} V_\infty^2\right)^2$$

$$V_\infty^2 \cdot \left(\frac{b}{GM_1}\right)^2 \le \frac{2R_1}{GM_1} + V_\infty^2 \cdot \left(\frac{R_1}{GM_1}\right)^2$$

$$b^2 \le \frac{2R_1 \cdot GM_1}{V_\infty^2} + R_1^2 = R_1^2\left(1 + \frac{2GM_1}{R_1} \cdot \frac{1}{V_\infty^2}\right)$$

$$\Downarrow$$

תנאי לפגיעה $\boxed{b^2 \le R_1^2\left[1+\left(\frac{V_{esc}}{V_\infty}\right)^2\right]}$

V_{esc} זו מהירות הבריחה מהכוכב ומהווה

מדד לחוזק של המשיכה הגרביטציונית שלו.

ככל ש- V_{esc} גבוה יותר גם גופים רחוקים יותר

יפגעו בכוכב (Gravitational focusing).