מכניקה קלאסית - תרגול 8

I תזכורת

כוח $\vec{F}$ נקרא <u>כוח משמר</u> אם העבודה שלו לאורך מסלול בין כל 2 נקודות $\vec{r}_i$, $\vec{r}_f$, <u>אינה</u> תלויה במסלול המדויק בין הנקודות אלא <u>רק</u> בנקודות הקצה. כלומר, העבודה

$$\boxed{W=\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f}\vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

היא פונקציה של הנקודות $\vec{r}_i$, $\vec{r}_f$ <u>בלבד</u>, ולא של כל הנקודות שבדרך:

$$\boxed{W=W(\vec{r}_i,\vec{r}_f)}$$

במקרה זה, ניתן לרשום את הכוח $\vec{F}$ כגרדיאנט של אנרגיה פוטנציאלית <u>סקלארית</u>, U:

$$\boxed{\vec{F}=-\vec{\nabla}U}$$

אם גוף נע לאורך מסלול כלשהו, בהשפעת כוח כולל $\vec{F}$ שמורכב מכוחות משמרים $\vec{F}_c$ וכוחות לא משמרים $\vec{F}_{NC}$, אזי מתקיים:

$$\boxed{\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f}\vec{F}_{NC}\,d\vec{r}=W_{N.C.}=\Delta\left(E^{mech}\right)=\Delta\left(E_k+U\right)=\left(\tfrac{1}{2}mV^2+U\right)_{(\vec{r}_f)}-\left(\tfrac{1}{2}mV^2+U\right)_{(\vec{r}_i)}}$$

אם הכוחות היחידים שפועלים על הגוף הם משמרים, אזי האנרגיה המכנית הכוללת (קינטית + פוטנציאלית) <u>נשמרת</u> לאורך התנועה:

$$\boxed{E_k+U=const}.$$

כלומר כאשר עוברים מאנרגיה פוטנציאלית גבוהה לאנרגיה פוטנציאלית נמוכה, מגדילים את האנרגיה הקינטית (מגבירים מהירות). כאשר עוברים מ-U נמוך ל-U גבוה, E_k קטן (מקטינים מהירות עד למצב הגבולי של עצירה מוחלטת).

נשים לב, עבור כוח משמר: $\vec{F}=-\vec{\nabla}U=\left(-\frac{\partial U}{\partial x},-\frac{\partial U}{\partial y},-\frac{\partial U}{\partial z}\right)$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{U_{(x,y,z)}=-\int F_x\,dx=-\int F_y\,dy=-\int F_z\,dz}$$

II דוגמאות

(א) חישוב פוטנציאלים

(1) $\vec{F} = F_0\left(2xy - ze^{-y},\ x^2 + zxe^{-y},\ -xe^{-y}\right)$ כאשר F_0 קבוע.

ננסה למצוא אנרגיה פוטנציאלית U.

- $$U = -\int F_x dx = -F_0\int(2xy - ze^{-y})dx = -F_0(x^2y + xze^{-y}) + f(y,z)$$

מהו $f(y,z)$? למעשה זה בתפקיד של קבוע אינטגרציה. באינטגרל חד מימדי, תמיד קיבלנו קבוע אינטגרציה, כי אם: $F = \int f(x)dx$ אזי $F'(x) = f(x)$ אבל גם $(F+C)' = f$ עבור קבוע C.

אבל כאן, האינטגרל הוא רק על x, עבור (y,z) קבועים. לכן אם נגזור $\frac{\partial}{\partial x}f(y,z) = 0$ וקבוע האינטגרציה שלנו מוחלף בפונקציה שרירותית של y ו z.

- $$U = -\int F_y dy = -F_0\int(x^2 + zxe^{-y})dy = -F_0(x^2y - xze^{-y}) + g(x,z)$$

- $$U = -\int F_z dz = -\int -xe^{-y}dz = F_0 xze^{-y} + h(x,y)$$

קיבלנו 3 ביטויים עבור U. כדי שהנוסחה שלנו תהיה קונסיסטנטית ו- U אכן אנרגיה פוטנציאלית מוגדרת היטב עבור הכוח $\vec{F}$, כל הביטויים הנ"ל חייבים להיות שווים זה לזה:

$$F_0(-x^2y + xze^{-y}) + f(y,z) = F_0(-x^2y + xze^{-y}) + g(x,z) = F_0(xze^{-y}) + h(x,y)$$

קל להווכח שהשוויון המשולש הנ"ל אפשרי אם ורק אם:

$$\left.\begin{aligned} f(y,z) &= C \\ g(x,z) &= C \\ h(x,y) &= F_0(-x^2y) + C \end{aligned}\right\}$$

עבור C קבוע אינטגרציה אמיתי.

לכן נקבל:

$$\boxed{U(x,y,z) = F_0\left(xze^{-y} - x^2y\right) + C}$$

נשים לב שהאנרגיה הפוטנציאלית מוגדרת רק עד כדי קבוע. זו תופעה ג'נרית. הקינמטיקה האמיתית נקבעת ע"י הכוחות. האנרגיה הפוטנציאלית היא אינטגרל על הכוח ולכן תמיד נקבל קבוע אינטגרציה.

למעשה, לאנרגיה הפוטנציאלית בנקודה מסויימת אין שום משמעות פיזיקלית. תמיד ניתן לשנות את האנרגיה הפוטנציאלית ע"י הזזה בקבוע. מה שכן חשוב זה ההפרש בין האנרגיה הפוטנציאלית בין 2 נקודות, שכן זה יעיד על ההפרש באנרגיה הקינטית בין 2 הנקודות הנ"ל (לפי שימור אנרגיה) וזה משהו שכן ניתן למדוד.
נשים לב שכאשר מחשבים הפרש אנרגיה פוטנציאלית, קבוע האינטגרציה יצטמצם ונקבל תשובה חד-ערכית.

$$\vec{F} = F_0\left(2xy - ze^{-y},\ x^2 + zxe^{-y},\ -xe^{-y} + x\right) \qquad (2)$$

אנליזה דומה לזו שביצענו מקודם תעניק:

$$U = -F_0\left(x^2y - xze^{-y}\right) + f(y,z)$$

$$U = -F_0\left(x^2y - xze^{-y}\right) + g(x,z)$$

$$U = -F_0\left(-xze^{-y} + xz\right) + h(x,y)$$

קל לראות שלא ניתן למצוא 3 פונקציות $f(x,y), g(x,z), h(x,y)$ כך ששלושת המשוואות הנ"ל תתקיימנה בו-זמנית.
המסקנה היא שאין U כך ש- $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ ולכן $\vec{F}$ הנ"ל אינו כוח משמר.

(ב) אנרגיה פוטנציאלית גרביטציונית בקרבת כדוה"א

כוח הגרביטציה בקרבת כדוה"א הוא: $\vec{F} = -mg\hat{z}$

האנרגיה הפוטנציאלית היא: $U = mgz + C = mg(z-z_0) = mgh$

כאשר C קבוע אינטגרציה (כמו שציינו מקודם), ונקבע:

$C = -mgz_0$ כאשר z_0 קבוע שרירותי שמהווה נקודת ייחוס

לחישוב האנרגיה הפוטנציאלית. למעשה קבענו $U(z=z_0) = 0$

$h = z - z_0$ זו הגובה מעל/מתחת z_0. נשים לב שעבור $z < z_0$

($h < 0$) נקבל $U < 0$ אבל אין עם זה שום בעיה.

שאלה: זורקים גוף למעלה במהירות V_0.

(א) מהו שיא הגובה של הגוף לפני שנופל מטה?

(ב) מהי מהירות הגוף כשהוא חוזר לנקודת ההתחלה?

(ג) מהו גובה הגוף כאשר מהירותו $V = 0.5V_0$? $V = 0.1V_0$?

פתרון:

תחילה נשים לב שלפתור שאלה זו בכלים קינמטיים קלאסיים היה לוקח המון זמן ואנרגיה מיותרים. עם שימור אנרגיה זה ממש פשוט.

מכיוון שהכוח היחיד שפועל על הגוף הוא כוח משמר $\vec{F} = -mg\hat{z}$

נקבל שבמהלך תנועתו: $E_k + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = const$

נבחר את מישור הייחוס (ביחס אליו מודדים את h) להיות בגובה ההתחלתי של הגוף.

(א) $mgh_{max} + 0 = 0 + \frac{1}{2}mV_0^2$ (בשיא הגובה, $V=0$; בהתחלה, $h=0$)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{h_{max} = \frac{V_0^2}{2g}}$$

(ב) שימור אנרגיה בין ההתחלה לסוף: $0 + \frac{1}{2}mV_f^2 = 0 + \frac{1}{2}mV_0^2$

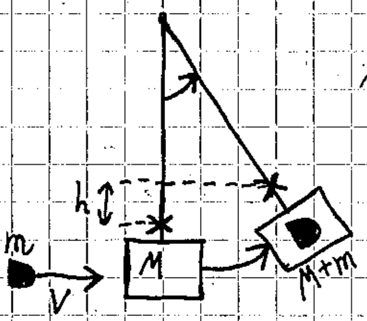
$$\Downarrow$$

$V_f = V_0$ (כמובן שהכיוון התהפך מלמעלה למטה)

(ג) שימור אנרגיה: $mgh_{0.5} + \frac{1}{2}m\left(\frac{V_0}{2}\right)^2 = 0 + \frac{1}{2}mV_0^2 \Rightarrow \boxed{h_{0.5} = \frac{3V_0^2}{8g} = \frac{3}{4}h_{max}}$

$mgh_{0.1} + \frac{1}{2}m\left(\frac{V_0}{10}\right)^2 = 0 + \frac{1}{2}mV_0^2 \Rightarrow \boxed{h_{0.1} = \frac{99}{100}\frac{V_0^2}{2g} = \frac{99}{100}h_{max}}$

שאלה: מטוטלת בליסטית



לחישוב מהירות של קליעים משתמשים לעתים במטוטלת בליסטית. המתקן כולל משקולת שמסתה M, שלתוכה יורים את הקליע. מודדים את הגובה h, אליו מגיעה המשקולת.

(א) הראו כיצד ניתן לחשב את מהירות הקליע מתוך מדידת הגובה h וידיעת מסת הקליע m ומסת המשקולת M.

(ב) מה העבודה שעשה החיכוך בעת חדירת הקליע למשקולת?

פתרון

הנחת העבודה היא שחדירת הקליע למשקולת היא רגעית, במילים אחרות הזמן שלוקח לקליע לחדור למשקולת הרבה יותר קצר מהזמן שלוקח למשקולת לעלות לגובה h לאחר מכן.

במצב כזה, מותר להתייחס לחדירת הקליע כאל התנגשות פלסטית ולהשתמש בחוק שימור התנע.

זה ייתן לנו את מהירות המערכת משקולת+קליע לאחר החדירה. מרגע זה ועד הגעה לשיא הגובה, הכוחות היחידים שפועלים הם גרביטציה (משמר), ומתיחות בחבל (לא מבצע עבודה. מדוע?). לכן, חוק שימור האנרגיה תקף במהלך העליה לגובה.

(א) שימור תנע:

$$mV=(M+m)u \Rightarrow \boxed{u=\frac{m}{M+m}V}$$

שימור אנרגיה:

$$\frac{1}{2}(m+M)u^2=(m+M)gh$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{h=\frac{u^2}{2g}=\frac{m^2}{2g(M+m)^2}\cdot V^2}$$

$$\boxed{V=\frac{M+m}{m}\sqrt{2gh}=\left(1+\frac{M}{m}\right)\sqrt{2gh}}$$

(ב) העבודה שביצע החיכוך היא ההפרש בין האנרגיה מיד לאחר ההתנגשות לבין האנרגיה מיד לפני ההתנגשות:

$$W=\frac{1}{2}(m+M)u^2-\frac{1}{2}mV^2=\frac{m+M}{2}\cdot\frac{m^2}{(m+M)^2}V^2-\frac{m}{2}V^2$$

(המשך בעמ' הבא)

$$W = \frac{mV^2}{2}\left(\frac{m}{m+M} - 1\right) = -\frac{mM}{2(m+M)}V^2 = -\frac{mM}{2(m+M)}\cdot\left(\frac{M+m}{m}\right)^2\cdot 2gh$$

$$\boxed{W = -\frac{M(M+m)}{m}gh = -\frac{M}{m}\cdot\underbrace{(M+m)gh} = -\frac{M}{m}\underbrace{E_f}}$$

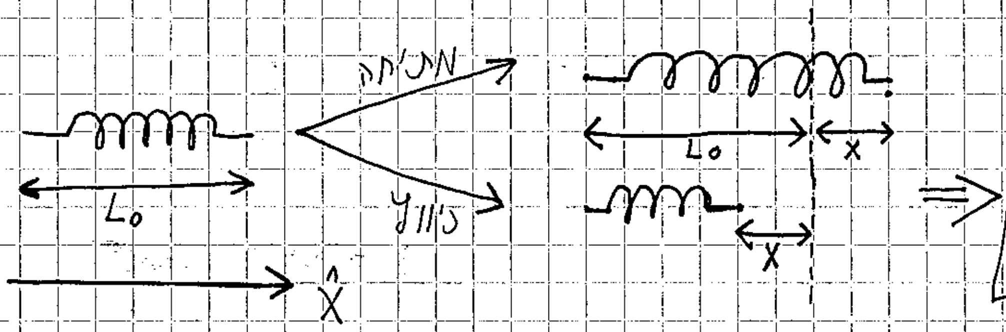
אנרגיית המערכת במצב הסופי

$W<0$ כלומר איבדנו אנרגיה

$|W| > E_f$ כלומר איבדנו יותר אנרגיה ממה שנשארנו איתה.

(ג) אנרגיה פוטנציאלית אלסטית (של קפיץ)

נניח קפיץ שאורכו הרפוי (כאשר הוא לא מחובר לכלום) הוא L_0.



אורך הקפיץ: $L=L_0+X$

כאשר הקפיץ מתוח או מכווץ בשיעור X ביחס ל- L_0 (X חיובי יציין מתיחה, X שלילי יציין כיווץ, כמו איור למעלה), הכוח שהקפיץ יפעיל נתון ע"י: $\boxed{\vec{F}=-kX\hat{x}}$ כאשר k נקרא "קבוע הקפיץ" והוא מספר חיובי קבוע.

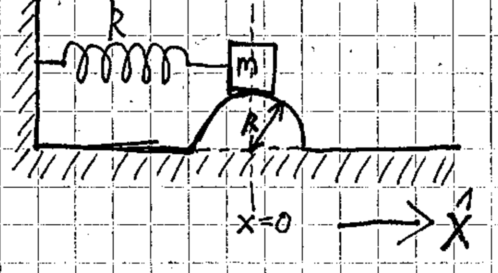
שימו לב שעבור $X>0$, הכוח שלילי ועבור $X<0$ הכוח חיובי.
כלומר אם הקפיץ מתוח, הכוח שואף לכווץ אותו חזרה, ואם הקפיץ מכווץ הכוח שואף למתוח אותו חזרה.

כאשר $X=0$, כלומר הקפיץ רפוי (לא מתוח ולא מכווץ), $L=L_0$, הכוח מתאפס ויש שיווי משקל.

האנרגיה הפוטנציאלית היא $\boxed{U=\frac{1}{2}kX^2+C=\frac{1}{2}kX^2}$

כאשר נהוג לקבוע את קבוע האינטגרציה $C=0$, כלומר שהאנרגיה הפוטנציאלית מתאפסת עבור קפיץ רפוי, $X=0$.

שאלה:



קפיץ עם קבוע k מחובר מצד אחד לקיר ומצד שני למסה m.
המסה m מונחת על פני בליטה שמהווה חצי מעגל ברדיוס R מעל הרצפה האופקית. כאשר המסה בפסגת הבליטה, הקפיץ רפוי.
מזיזים את המסה מעט ממקומה בפסגה.

(א) למצוא את הכוח שפועל על המסה [redacted] לאורך ציר X, בקירוב של סטיות קטנות מפסגת הבליטה.

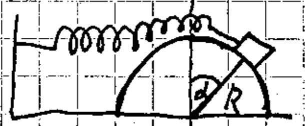
(ב) מהן נקודות שיווי המשקל של המסה?

(ג) אילו מהן יציבות ואילו לא?

פתרון: נגדיר $X=0$ בנקודת הריפיון של הקפיץ (פסגת הגליל) ו-$Z=0$ ברצפה. $\hat{X}$ חיובי ימינה, $\hat{Z}$ חיובי למעלה.

[redacted]

(ד) מה המשמעות כאן של "בקירוב של סטיות קטנות מהפסגה"?



כאשר המסה נמצאת בזווית α מהפסגה, התארכות הקפיץ משיווי משקל היא אורך הקשת: $\Delta l = R\alpha$.

הנחה של סטיות קטנות אומרת שהזווית α קטנה, ולכן: $\boxed{\Delta l = X} \Leftarrow \alpha \cong \sin(\alpha) = \frac{X}{R}$

נרשום את האנרגיה הפוטנציאלית של המסה בקירוב הנ"ל. אנרגיה זו מורכבת מתרומת הקפיץ, ותרומת הגרביטציה mg. עקרונית, יש עוד כוח בבעיה, הכוח הנורמלי, אבל כוח זה אינו משמר ולכן אין לו אנרגיה פוטנציאלית. מצד שני, הכוח הנורמלי לא מבצע עבודה מכיוון שהוא פועל בניצב לתנועת המסה.

$$U_{(x)} = \frac{1}{2}k(\Delta l_{(x)})^2 + mgZ_{(x)} = \frac{1}{2}kX^2 + mg\sqrt{R^2-X^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F_x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\left[kX + mg\cdot\frac{-2X}{2\sqrt{R^2-X^2}}\right] = \boxed{mg\frac{X}{\sqrt{R^2-X^2}} - kX}$$

<u>תרגיל לתלמיד הרציני:</u> הראו שהביטוי $mg\frac{X}{\sqrt{R^2-X^2}}$ הוא פשוט הכוח הנורמלי בכיוון $\hat{X}$ שמפעילה הגליל (כמובן, בקירוב שלנו של סטיות קטנות), ושבקירוב הנ"ל סכום הכוחות בציר $\hat{Z}$ מתאפס, ולכן:

$$\boxed{\vec{F} = F_x\hat{X} = -\vec{\nabla} U}$$

(ב) ש"מ מתרחש כאשר $F=0 \Leftarrow \frac{\partial U}{\partial X}=0$, כלומר כאשר:

$$X\left(\frac{mg}{\sqrt{R^2-X^2}} - k\right) = 0 \Longrightarrow$$

יש 3 נקודות ש"מ למסה:

$$\boxed{X=0,\ \pm\sqrt{R^2-\left(\frac{mg}{k}\right)^2}}$$

כאשר התנאי $R \geq \frac{mg}{k}$, אחרת רק $X=0$ נק' ש"מ.

(ג) ראינו ששיווי משקל יציב מתרחש במינימום של האנרגיה הפוטנציאלית ($U'(x)=0$, $U''(x)>0$) ושיווי משקל לא יציב מתרחש במקסימום: ($U'(x)=0$, $U''(x)<0$). אצלנו:

$$U'(x) = kx - mg\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$U''(x) = k - mg\cdot\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}} - \frac{mgx^2}{(R^2-x^2)^{3/2}}$$

$$\Downarrow$$

• $U''(0) = k - \frac{mg}{R} > 0 \longrightarrow$ כך $R > \frac{mg}{k}$ וזה לפי תנאי לקבל 3 נק' ש"מ.

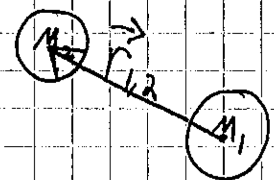
במקרה הזה, $x=0$ הוא ש"מ יציב.

• $U''\left(\pm\sqrt{R^2-\left(\frac{mg}{k}\right)^2}\right) = \frac{-mg}{\left(\frac{mg}{k}\right)^3}\cdot\left[R^2-\left(\frac{mg}{k}\right)^2\right] < 0 \Longrightarrow$ נק' אלו מהוות שיווי משקל לא יציב.

(ד) אנרגיה פוטנציאלית גרביטציונית

2 גופים: M_1 ו-M_2. הכוח הגרביטציוני על M_2 בגלל M_1:

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{GM_1M_2}{r_{1,2}^2}\hat{r}_{1,2}}$$



$$\Downarrow$$

$$\boxed{U=} -\frac{GM_1M_2}{r_{1,2}} + C = \boxed{\frac{-GM_1M_2}{r_{1,2}}}$$: האנרגיה הפוטנציאלית בין הגופים

כאשר לקחנו $C=0$ כך ש $U=0$ כאשר $r_{1,2}\to\infty$

(במקרה הזה מתקיים ... , $\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial r_{1,2}}\hat{r}_{1,2}$ ותראו למה זה בסמסטר ב.)

מושג הפוטנציאל

לשם נוחות, נסמן מעתה את M_2 (הגוף עליו מסתכלים, כי שפועל עליו הכוח) בתור m ואת M_1 (הגוף שמפעיל את הכוח) בתור M.

מכיוון שראינו שהדינאמיקה (התאוצה) לא תלויה ב-m שכן:

$$a = -\frac{GM}{r^2}, \Longleftarrow ma = F = -\frac{GMm}{r^2}$$

נוח להגדיר מושג שדומה לאנרגיה הפוטנציאלית, אך שלא תלוי ב-m.

אי-לכך, מגדירים את הפוטנציאל הגרביטציוני $\phi = \frac{U}{m}$.

לכן: $\boxed{\phi(r) = -\frac{GM}{r}}$

משמעות: $\phi(r)$ זו האנרגיה הפוטנציאלית שהייתה למערכת אם היינו שמים "מסת בוחן" $m=1$ במרחק r מהמסה M.

אומרים שהמסה M משרה פוטנציאל ϕ במרחק r ממנו.

פרשנות של U

בין שני גופים M ו-m המרוחקים מרחק r יש אנרגיה פוטנציאלית $U = -\frac{GmM}{r}$.

שמים לב כי $U \leq 0$ תמיד ושעבור מרחק אינסופי בין הגופים $U_{(r\to\infty)} \to 0$, כלומר הגופים לא יודעים זה על קיומו של זה, ולכן אין אנרגיה פוטנציאלית במערכת.

נניח שהגוף M נמצא בראשית. כמה עבודה אני צריך לבצע כנגד הגרביטציה כדי להביא את הגוף m למרחק r מ-M?

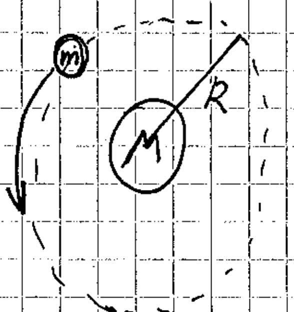
כאשר אני מביא את m מהאינסוף, שם הוא היה במנוחה, למרחק r מ-M כאשר גם שם הוא במנוחה, האנרגיה הקינטית שלו לא השתנתה. לכן סה"כ העבודה שבוצעה עליו מתאפסת. עבודה זו היא הסכום של העבודה שמפעילה עליו הגרביטציה והעבודה שאני מפעיל. כלומר:

העבודה שאני מבצע כדי להביא את m ממנוחה ב-∞ למנוחה במרחק r מ-M = מינוס העבודה שהגרביטציה מבצעת לאורך המסלול הנ"ל =

$$= -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^{\vec{r}} (\vec{\nabla}\cdot u)\cdot d\vec{r} = U(\vec{r}) - U(\infty) = U(r) - 0 = \boxed{U(r)}$$

אנרגיה כוללת של גוף m במסלול מעגלי סביב גוף M

<u>למשל</u>: • כדה"א סביב השמש
• ירח סביב כדה"א
• לוויין סביב כדה"א.
⋮



האנרגיה הכוללת היא סכום האנרגיה הפוטנציאלית והקינטית:

$$E_{tot}=E_k+U=\frac{1}{2}mV^2-\frac{GmM}{R}$$

ראינו בעבר שעבור תנועה מעגלית כזו מתקיים $V^2=\frac{GM}{R}$

<u>לכן:</u>

$$\boxed{E_k}=\frac{1}{2}mV^2=\frac{GmM}{2R}=\boxed{-\frac{1}{2}U=\left|\frac{1}{2}U\right|}$$

$$\boxed{E_{tot}}=E_k+U=-\frac{1}{2}U+U=\boxed{\frac{1}{2}U=-\frac{GmM}{2R}=-E_k}$$

שימו לב ש: $E_{tot}\le 0$ והשוויון רק עבור $R\to\infty$.

<u>שאלה:</u> • כמה אנרגיה דרושה להביא לוויין מפני כדה"א למסלול מעגלי ברדיוס r סביב כדה"א (כלומר גובה $h=r-R_E$ מעל פני כדה"א)? וממרחק r ל-2r?

<u>פתרון:</u> האנרגיה שהענקנו ללוויין היא פשוט ההפרש של האנרגיה הסופית וההתחלתית שלו.

$$\underbrace{E^f}_{\text{מסלול מעגלי ברדיוס } r}=-\frac{GM_E}{2r}\cdot m\quad,\quad \underbrace{E^i}_{\text{במנוחה ברדיוס } R_E}=U(R_E)=-\frac{GM_E}{R_E}m$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta E}=-GM_Em\left(\frac{1}{2r}-\frac{1}{R_E}\right)=\boxed{GM_Em\left(\frac{1}{R_E}-\frac{1}{2r}\right)>0}$$

<u>ומ-r ל-2r:</u>

$$\boxed{\Delta E}=-\frac{GM_Em}{2(2r)}-\frac{-GM_Em}{2r}=\boxed{\frac{GM_Em}{4r}}$$

מהירות בריחה:

נניח גוף במסה m שנמצא על פלנטה/כוכב במסה M
וברדיוס R. אם נזרוק את m מעלה, הגרביטציה תמשוך אותו
חזרה מטה. אם מהירות הזריקה נמוכה, הגוף יפול חזרה.
אבל אם המהירות גבוהה מספיק, הגוף m יתנתק לגמרי
מ- M ולמעשה יברח לאינסוף.

מהירות הבריחה היא המהירות שיש להעניק לגוף כדי שהוא
בדיוק יספיק להגיע לאינסוף, ושם באינסוף, הוא נעצר ומהירותו 0.

משימור אנרגיה:

$$\underset{\parallel}{U^i} + E_k^i = U^f + E_k^f = U_{(\infty)} + \frac{1}{2} m \cdot 0^2 = 0 + 0 = 0$$

$$-\frac{GM}{R} m + \frac{1}{2} m V_{esc}^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{V_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$