מכניקה קלאסית - תרגול 5

(I) תנועת חלקיק טעון תחת כוח לורנץ

נגדיר <u>שדה מגנטי</u> $\vec{B}$ כתכונה של המרחב שקובע את <u>הכוח המגנטי</u> שמרגיש חלקיק במטען חשמלי q הנע במהירות $\vec{v}$.
כוח זה נקרא <u>כוח לורנץ</u> והוא נתון ע"י:

$$\boxed{\vec{F}_L = \frac{q}{c}\vec{v}\times\vec{B}}$$

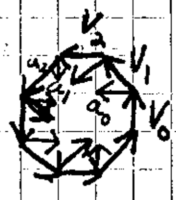
כאשר $\boxed{c \cong 3\times10^{10}\frac{cm}{sec}}$ (ג"ח)
מהירות האור.

מהחוק השני של ניוטון, נקבל ביטוי לתאוצה של חלקיק כזה:

$$\vec{a} = \frac{q}{mc}\vec{v}\times\vec{B}$$

מכיוון שמכפלה וקטורית של שני וקטורים תמיד <u>ניצבת</u> לשני הוקטורים, נקבל כי בכל רגע, תאוצת החלקיק <u>ניצבת</u> למהירות החלקיק. תאוצה כזו, <u>שניצבת</u> למהירות, מזכירה לנו תנועה מעגלית שם המהירות היא לאורך היקף של מעגל ואילו התאוצה היא כלפי מרכז המעגל. אכן, תאוצה ניצבת למהירות תמיד תגרום לתנועה מעגלית:

התוספת למהירות $\Delta\vec{v} \cong \vec{a}\cdot\Delta t$
היא תמיד <u>ניצבת</u> למהירות, ולכן
כשמחברים וקטורית מקבלים תנועה
מעגלית.



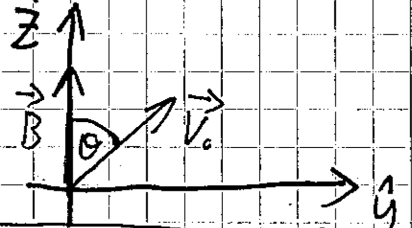
<u>אבל זה לא סוף הסיפור:</u> התאוצה גם ניצבת לשדה המגנטי $\vec{B}$, ולכן, אם יש רכיב מהירות בכיוון זה, הוא <u>לא</u> ישתנה. נראה דוגמא.

<u>דוגמא:</u> נניח חלקיק שנע במהירות התחלתית $\vec{v}_0$ באזור שבו <u>אין</u> שדה מגנטי $\vec{B}$, ובכלל אין כוחות שפועלים על החלקיק. ברגע $t=0$, הוא נכנס לאזור במרחב שבו יש שדה מגנטי אחיד וקבוע $\vec{B}$. איך תיראה תנועתו?

פתרון: אנחנו חופשיים להגדיר את מערכת הצירים כבחירה כפי שנוח לנו. מכיוון שבבעיה, השדה המגנטי $\vec{B}$ אחיד וקבוע, נוח לבחור את ציר $\hat{z}$ שיתלכד עם כיוון השדה המגנטי ולכן נקבל:

$$\boxed{\vec{B} = B\hat{z}}$$

כעת, למהירות ההתחלתית $\vec{V}_0$ יש רכיב במקביל לשדה המגנטי: $V_{0,z}$, ורכיב שניצב לשדה המגנטי, כלומר במישור y-x. לכן, נבחר את ציר $\hat{y}$ כך שיתלכד עם רכיב המהירות של החלקיק במישור y-x. במילים אחרות, קבענו ש: $\boxed{\vec{V}_0 \cdot \hat{x} = 0}$, כלומר המהירות ההתחלתית של החלקיק היא במישור z-y:



נסמן ב- θ את הזווית בין השדה המגנטי $\vec{B}$ והמהירות ההתחלתית $\vec{V}_0$. כך נקבל:

$$\vec{B} = B\hat{z} = (0,0,B)$$
$$\vec{V}_0 = V_0\sin\theta\,\hat{y} + V_0\cos\theta\,\hat{z} = (0, V_0\sin\theta, V_0\cos\theta)$$

נקבע את נקודת ההתחלה של החלקיק $\vec{r}_0 = (x_0, 0, 0)$

תאוצת החלקיק:

$$\vec{a}_{(t)} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{q}{mc}\vec{V}_{(t)} \times \vec{B}$$

מכיוון ש: $B_x = B_y = 0$, $B_z = B$ מקבלים: $\boxed{\vec{V}\times\vec{B} = V_y B\hat{x} - V_x B\hat{y}}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \boxed{(\dot{V}_x, \dot{V}_y, \dot{V}_z) = \frac{qB}{mc}(V_y, -V_x, 0)}$$

קיבלנו משוואה דיפרנציאלית לכל רכיב מהירות.

נתחיל עם המשוואה עבור V_z:

$$\dot{V}_z = 0$$
$$\Downarrow$$
$$V_z = const = V_{0,z} = V_0\cos\theta = \dot{z}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{z_{(t)} = z_0 + V_0\cos\theta\, t}$$

בציר $\hat{z}$ יש תנועה במהירות קבועה. $\Longrightarrow$ זה מכיוון שהכוח פועל רק בניצב לציר זה, ולכן אין תאוצה בציר זה.

נתבונן בשתי המשוואות המתקבלות:

$$\dot{V}_x = \frac{qB}{mc} V_y$$

$$\dot{V}_y = -\frac{qB}{mc} V_x$$

נתבונן ביחידות של הביטוי $\frac{qB}{mc}$. מהמשוואות למעלה, רואים שהיחידות של ביטוי זה הן $\left[\frac{qB}{mc}\right] = \frac{1}{sec}$. נסמן

$$\boxed{\omega_c = \frac{qB}{mc}}$$ תדירות הציקלוטרון

כך שנקבל:

$$\boxed{\begin{aligned} &(1) \quad \dot{V}_x = \omega_c \cdot V_y \\ &(2) \quad \dot{V}_y = -\omega_c V_x \end{aligned}}$$

סט של 2 משוואות דיפרנציאליות מצומדות.

[redacted]

נכפיל את משוואה (1) ב- V_x ואת משוואה (2) ב- V_y. נקבל:

$$+\begin{cases} (1) \quad V_x \dot{V}_x = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(V_x^2) = \omega_c V_x V_y \\ (2) \quad V_y \dot{V}_y = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(V_y^2) = -\omega_c V_x V_y \end{cases}$$ (נחבר את המשוואות)

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(V_x^2) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(V_y^2) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(V_x^2 + V_y^2) = 0$$

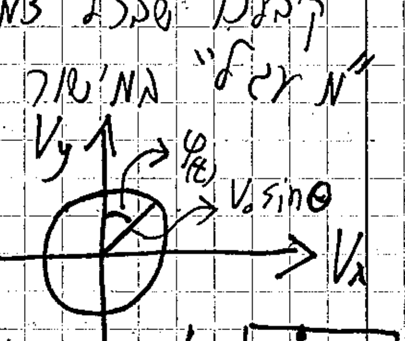
$$\Downarrow$$

$$V_x^2 + V_y^2 = const = V_{0,x}^2 + V_{0,y}^2 = 0^2 + (V_0 \sin\theta)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{V_x^2(t) + V_y^2(t) = (V_0 \sin\theta)^2 = const}$$

קיבלנו שבכל זמן t, רכיבי המהירות V_x, V_y יושבים על "מעגל" במישור (V_x, V_y) ב"רדיוס" $(V_0 \sin\theta)$.



נגדיר את הזווית $\varphi_{(t)}$ בין וקטור המהירות לבין V_y, כפי שמסומן בציור. כך:

$$V_y(t) = (V_0 \sin\theta) \cdot \cos(\varphi_{(t)}) \longrightarrow \boxed{\dot{V}_y} = (V_0 \sin\theta) \cdot (-\sin\varphi_{(t)}) \cdot \dot{\varphi} = \boxed{-\dot{\varphi} \cdot V_x}$$

$$V_x(t) = (V_0 \sin\theta) \sin(\varphi_{(t)}) \longrightarrow \boxed{\dot{V}_x} = (V_0 \sin\theta) \cdot \cos\varphi_{(t)} \cdot \dot{\varphi} = \boxed{\dot{\varphi} \cdot V_y}$$

ומכאן רואים ש: $\Longleftarrow$ $\omega_c = \dot{\varphi} \Leftarrow \boxed{\varphi_{(t)} = \omega_c t + \varphi_0}$

כך קיבלנו

$$V_x(t)=V_0\sin\theta\cdot\sin(\omega_c t+\varphi_0)$$
$$V_y(t)=V_0\sin\theta\cdot\cos(\omega_c t+\varphi_0)$$

מתנאי ההתחלה:

$V_x(t=0)=0$, $V_y(t=0)=V_0\sin\theta$ מקבלים כי $\varphi_0=0$

ולכן קיבלנו את שלושת רכיבי המהירות כתלות בזמן:

$$\boxed{\begin{aligned}V_x(t)&=V_0\sin\theta\sin(\omega_c t)\\ V_y(t)&=V_0\sin\theta\cos(\omega_c t)\\ V_z(t)&=V_0\cos\theta\end{aligned}}$$

מכאן נבחרה המשמעות של "תדירות הציקלוטרון" ω_c: זו התדירות של התנועה המעגלית שמתרחשת במישור (X-Y):

$$\Downarrow$$

$$X(t)=-\frac{\cancel{V_0}\sin\theta}{\omega_c}\cos(\omega_c t)+C_x$$
$$y(t)=\frac{V_0\sin\theta}{\omega_c}\cdot\sin(\omega_c t)+C_y$$
$$Z(t)=V_0\cos\theta\cdot t+C_z$$

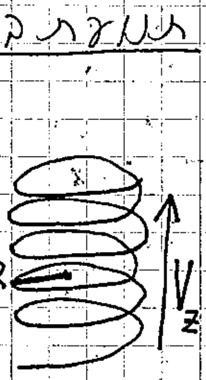
(*) הרי התנועה ההתחלתית היתה בכוונים $\hat y$ ו-$\hat z$. לכן, נניח כי הוא נכנס לאזור השדה $\vec B$ ב- $y_0=0=z_0$ ובנקודה $X_0=-R$ (שרירותי)

נסמן: $R=\frac{V_0\sin\theta}{\omega_c}=\frac{mc}{qB}V_0\sin\theta$ ונקבל:

$$X=-R\cos(\omega_c t)+C_x \Longrightarrow C_x=X_0+R$$
$$y=R\sin(\omega_c t)+C_y \Longrightarrow C_y=y_0$$
$$Z=V_0\cos\theta\cdot t+C_z \Longrightarrow C_z=Z_0$$

נוכל למקם את ראשית הצירים כך שהחלקיק התחיל את תנועתו בנקודה: $\vec r_0=(x_0,y_0,z_0)=(-R,0,0)$ (*) ונקבל:

תנועת בורג



$$\boxed{\begin{aligned}X(t)&=-R\cos(\omega_c t)\\ y(t)&=R\sin(\omega_c t)\\ Z(t)&=(V_0\cos\theta)\cdot t\end{aligned}}$$

תנועה מעגלית ברדיוס $R=\frac{mc}{qB}V_0\sin\theta$ ובתדירות $\omega_c=\frac{qB}{mc}$ במישור XY

תנועה במהירות קבועה של $V_0\cos\theta$ בציר $\hat z$

II כוח גרר + גרביטציה (נפילה חופשית בתווך צמיגי)

בכיתה, ראינו מודל לכוח גרר שפועל על גוף הנע בתווך צמיגי:

$\vec{F}_{drag} = -b\cdot\vec{V}$ כאשר $b=const$ ומעיד על רמת הצמיגות של התווך (חוזק הגרר)

כעת נוסיף למודל זה גרביטציה, כלומר עוד כוח קבוע $|F_g|=mg$ המכוון כלפי מטה. מודל כזה יאפשר תיאור של גופים הנופלים נפילה חופשית/בליסטית בתוך תווך צמיגי. הפרמטר b הוא מקדם גרר וקובע את עוצמת הגרר לפי הצמיגות. כך למשל $b_{קפה} \gg b_{אויר}$

לשם פשטות, נדון בתנועה חד מימדית לאורך ציר $\hat{z}$, של גוף שמתחיל ממנוחה ($V_0=0$) ומתחיל ליפול חופשית. נגדיר את הכיוון החיובי של $\hat{z}$ להיות כלפי מטה כך ש: $\vec{F}_g=+mg\hat{z}$ והמהירות כלפי מטה היא $\vec{V}=+V\hat{z}$ עם $0<V$.

כך נקבל: $m\dot{V}=ma=F=F_g+F_d=mg-bV$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dot{V}}=-\frac{b}{m}V+g=\boxed{-\frac{V}{\tau}+g} \quad (1)$$

כאשר הגדרנו $\boxed{\tau=\frac{m}{b}}$. נשים לב שמתקיים:

$$[\dot{V}]=\frac{[V]}{sec}=\left[\frac{b}{m}V\right] \Longrightarrow \left[\frac{b}{m}\right]=\frac{1}{sec} \Longrightarrow \boxed{\left[\frac{m}{b}\right]=[\tau]=sec}$$

τ משמש כאן "זמן אופייני" בבעיה. זהו מקדם לזמן שבו מתרחשים שינויים במהירות.

מה מתארת לנו משוואה (1)? הגוף מתחיל ממנוחה, כלומר $V(t=0)=0$. לכן, ברגע זה, $\dot{V}(t=0)=g$ והגוף מתחיל להאיץ כלפי מטה. ככל שעובר הזמן, V גדלה, עד שבאיזשהו שלב $\boxed{\dot{V}=g-\frac{V}{\tau}=0}$ ומרגע זה, אין תאוצה לגוף! לכן, המהירות של הגוף נשארת קבועה, בערך הסופי: $\boxed{V_{terminal}=g\tau}$

וזהו סוף התהליך הדינאמי של הבעיה.

מכאן המשמעות של הזמן האופייני τ בדרכה: המהירות הסופית האסימפטוטית של הגוף (שכפי שעוד נראה, הגוף מגיע אליה רק כעבור אינסוף זמן, באופן אקספוננציאלי), היא המהירות שהגוף היה מפתח בהיעדר גרר, בהשפעת גרביטציה בלבד, כעבור זמן τ.

נפתור את הבעיה במדויק:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{v}{\tau}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{g-\frac{v}{\tau}}\cdot\frac{dv}{dt} = 1 \Longrightarrow \underbrace{\int_0^t \frac{1}{g-\frac{v}{\tau}}\frac{dv}{dt'}dt'}_{} = \int_0^t 1\,dt' = t$$

נבצע החלפת משתנה: במקום $t \leftarrow v_{(t)}$

• $dv = \frac{dv}{dt}\cdot dt$

• גבולות: $V_{(t)} = V,\ V_{(0)} = 0$

$$-\tau\left[\ln\left(g-\frac{v}{\tau}\right)-\ln g\right] = (-\tau)\cdot\ln\left(g-\frac{v'}{\tau}\right)\Big|_{v'=0}^{v} = \int_0^V \frac{dv'}{g-\frac{v'}{\tau}} = t$$

$$\Downarrow$$

$$\ln\left(1-\frac{v}{g\tau}\right) = \ln\left(\frac{g-\frac{v}{\tau}}{g}\right) = -\frac{t}{\tau}$$

$$\Downarrow$$

$$1-\frac{v}{g\tau} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Downarrow$$

$$V = g\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{V = g\tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

מכאן רואים ש: $V_{(t=0)} = 0$ כי $e^0 = 1$

$V_{(t\to\infty)} = g\tau = V_{terminal}$ כי $e^{-\infty} = 0$

ולכל $0 < t < \infty$ $V_{(t)} < g\tau$, כלומר יש תאוצה תמידית עד להגעה למהירות הסופית.

התאוצה: $\boxed{a = \dot{v} = g e^{-\frac{t}{\tau}}} \Leftarrow$ $a_{(t=0)} = g$, $a_{(t\to\infty)} = 0$ $\boxed{\text{יש דעיכה אקספוננציאלית}}$

III) **התנע**: התנע הקווי של גוף הינו וקטור שמוגדר להיות המסה של גוף כפול המהירות שלו: $\vec{P}=m\cdot\vec{V}$

בא"ז שבו מקום, זהו מדד ל"רצון" של גוף להתמיד בתנועה בקו ישר במהירות קבועה (שהיא אולי 0): ככל שמסת הגוף גבוהה יותר, קשה יותר לגרום לו לסטות ממסלולו, וכנ"ל ככל שמהירות הגוף גבוהה יותר במסה נתונה.

ראיתם את החוק השני של ניוטון בצורתו המוכללת $\vec{F}_{ext}=\dot{\vec{P}}=\dot{m}\vec{V}+m\vec{a}$ ולא רק $F=m\vec{a}$, כי גם המסה יכולה להשתנות.

קיבלתם את <u>חוק שימור התנע</u> הקווי: כי בהיעדר כוחות חיצוניים, במערכת סגורה, התנע של המערכת נשמר.

אם $\vec{F}_{ext}=0$ אזי $\dot{\vec{P}}=0\Rightarrow\vec{P}=const$ (כל הכוחות הפנימיים מתבטלים בגלל חוק ניוטון השלישי).

עוד מושג חשוב זהו <u>המתקף</u>:

$$\boxed{\vec{J}}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{ext}dt=\int_{t_1}^{t_2}\dot{\vec{P}}dt=\boxed{\vec{P}_2-\vec{P}_1}$$

<u>מתקף גורם לשינוי בתנע.</u>

<u>בעיית טיל שיוצא מחוץ לכדור הארץ</u>

ההנעה נעשית ע"י שריפת דלק נוזלי. הדלק מהווה מרכיב עיקרי ממסת הטיל.

<u>נגדיר:</u>

- $M_{(t)}$: מסת (טיל+דלק) בזמן t.
- $M_{(t=0)}=M_0$
- $\beta=-\frac{dM}{dt}$ קצב שריפת הדלק
- $(-\omega)$: מהירות פליטת הדלק <u>ביחס לטיל</u> (סקלר)
- $V_{(t)}$: מהירות (טיל+דלק) בזמן t, ביחס לקרקע.
- $u_{(t)}=V_{(t)}-\omega$: מהירות פליטת הדלק ביחס לקרקע.

כיוון חיובי הוא כלפי <u>מעלה</u>.

- כוח חיצוני על הטיל+דלק בזמן t: $\vec{F}_{ext}=-M_{(t)}g\hat{z}$

נרשום משוואת מתקף = שינוי בתנע עבור פרק זמן <u>קצר</u> dt.

$$dt\left(-M_{(t^*)}g\right) = F_{ex}\,dt = P_{(t+dt)} - P_{(t)} = M_{(t+dt)}V_{(t+dt)} + \beta dt\left(V_{(t^*)} - \omega\right) - M_{(t)}V_{(t)}$$

מסת הדלק שנפלט בפרק הזמן dt

t^* זהו איזשהו זמן ממוצע בין t לבין $(t+dt)$.

הרי מסת הטיל ומהירות הטיל משתנים בזמן הזה, ולכן הכוח $F_{(t)} = -M_{(t)}g$ משתנה וכנ"ל מהירות פליטת הגז $u_{(t)} = V_{(t)} - \omega$, אבל נוכל לקחת איזשהו זמן ממוצע באמצע, מכיוון שפרק הזמן dt הוא קצר.

כמובן שבגבול $dt \to 0$ נקבל $t^* \to t$:

נסמן עוד: $M_{(t+dt)} = M_{(t)} + dM = M_{(t)} - \beta dt$ ונקבל:

$V(t+dt) = V_{(t)} + dV$

$$dt\left(-M_{(t^*)}g\right) = \left(M_{(t)} + dM\right)\left(V_{(t)} + dV\right) + \beta dt\left(V_{(t^*)} - \omega\right) - M_{(t)}V_{(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(-M_{(t^*)}g\right)\cdot dt = \cancel{M_{(t)}V_{(t)}} + M_{(t)}dV - V_{(t)}\beta dt - \beta dt\cdot dV + \beta V_{(t^*)}dt - \beta\omega dt - \cancel{M_{(t)}V_{(t)}}$$

$$\Downarrow$$

$$-M_{(t^*)}\cdot g = M_{(t)}\frac{dV}{dt} - \beta V_{(t)} - \beta dV + \beta V_{(t^*)} - \beta\omega$$

ניקח את הגבול $dt \to 0$ ואז: $t^* \to t$, $dV \to 0$:

$$-M_{(t)}g = M_{(t)}\dot{V} - \cancel{\beta V_{(t)}} + \cancel{\beta V_{(t)}} - \beta\omega$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dot{V}} = \frac{\beta\omega}{M_{(t)}} - g = \boxed{\frac{\beta\omega}{M_0 - \beta t} - g}$$

משוואה דיפרנציאלית עבור V

$$\Downarrow$$

$$V_{(t)} - V_0 = V_{(t)} = \int_0^t\left(\frac{\beta\omega}{M_0 - \beta t'} - g\right)dt'$$

$$\Downarrow$$

$$V_{(t)} = \beta\omega\cdot\frac{\ln\left[M_0 - \beta t'\right]}{-\beta}\Bigg|_{t'=0}^{t} - gt = -\omega\cdot\ln\frac{M_0 - \beta t}{M_0} - gt$$

התשובה הסופית:

$$\boxed{V_{(t)} = \omega \cdot \ln\left(\frac{M_0}{M_0-\beta t}\right) - gt}$$

נניח ש: $M_0 = M_{fu} + M_r$ כאשר M_r זו מסת הטיל ללא הדלק.

נניח שהדלק נגמר בזמן $\tilde{t}$, כלומר $\beta \tilde{t} = M_{fu}$ ונקבל את מהירות הטיל ברגע בו נגמר הדלק:

$$\boxed{\tilde{V}} = \omega \ln\left(\frac{M_{fu}+M_r}{M_r}\right) - g\tilde{t} = \boxed{\omega \ln\left[1+\frac{M_{fu}}{M_r}\right] - g\frac{M_{fu}}{\beta}}$$

כדי למקסם את המהירות הסופית הנ"ל, צריכים יחס:

$\frac{M_{fu}}{M_r}$ גבוה, אבל יחס $\frac{M_{fu}}{\beta}$ נמוך (כלומר קצב שריפת דלק גבוה).