אי־יציבות גרביטציונית של נוזל לא יחסותי
ביקום מתפשט

כבר דנתם בנושא זה בשיעור, וחזרתם עליו בתרגיל בית מספר 4.

כאן, אציג את תחילת הפיתוח מנקודת מבט מעט שונה. שבוע הבא, נשתמש בשיטות דומות כדי לטפל באי-יציבות של נוזל יחסותי, שרלוונטי ליקום המוקדם, כשהיה נשלט קרינה.

במקום לקחת את משוואות ההידרודינמיקה המוכרות, ולהעביר אותם לקורדינטות co-moving, ננסה לרשום את המשוואות הרלוונטיות ליקום מתפשט כבר בהתחלה, תוך הבנה פיזיקלית של מה שקורה.

עבור נוזל לא יחסותי, בצפיפות מסה ρ בנפח נתון V (V קבוע בקורדינטות co-moving), המסה המוכלת ב-V היא

$$M = a^3 \int_V d^3x \cdot \rho$$

נסמן $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ את השינוי הזמני של ה-co-moving coordinate (זה בעצם המהירות פחות התפשטות היקום, ש-Hubble Flow)

לכן, המהירות הפיזיקלית האמיתית של הנוזל יחסית לנפח V היא $a(t)\cdot\vec{v}$, ולכן הקצב שבו מסה יוצאת מהנפח הוא:

$$\vec{J} = a^2 \oint_V d^2\vec{S}\cdot(a\vec{v})\rho$$

כאשר $a^2 d^2\vec{S}$ הוא וקטור שגודלו אלמנט שטח על שפת של V, וכיוונו החוצה מהנפח.

כמובן שמתקיים $\frac{\partial M}{\partial t} = -\vec{J}$

ע"י שימוש במשוואת הדיברגנס מקבלים

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(a^3\rho) + a^3\vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0, \quad \vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{x}}}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\rho + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0}$$

מכאן קל לקבל

כאשר $H = \dot{a}/a$.

כדי לקבל את משוואות אוילר, נתחיל מהלגרנז'יאן.

האנרגיה הקינטית ליח' מסה של חלקיק ב- $\vec{X}$ עם מהירות $\vec{V} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt}$ היא

$$K = \frac{1}{2}(\dot{a}\vec{x} + a\vec{v})^2$$

ולכן הלגרנז'יאן הוא:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{a}\vec{x} + a\vec{v})^2 - \phi}$$

זה נותן מיד את משוואות התנועה ממשוואות אוילר לגרנז':

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[(\dot{a}\vec{x} + a\vec{v})\cdot a\right] - (\dot{a}\vec{x} + a\vec{v})\dot{a} + \vec{\nabla}\phi = 0$$

מכאן:

$$\Longrightarrow \quad \dot{a}(\dot{a}\vec{x} + a\vec{v}) + a\left(\ddot{a}\vec{x} + \dot{a}\vec{v} + \dot{a}\vec{v} + a\frac{d\vec{v}}{dt}\right) - \dot{a}(\dot{a}\vec{x} + a\vec{v}) + \vec{\nabla}\phi = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + 2H\vec{v} + \frac{\ddot{a}}{a}\vec{x} + \frac{1}{a^2}\vec{\nabla}\phi = 0}$$

כעת, אם החלקיק שקיבלנו עליו הוא חלק מנוזל, אז הנגזרת הלגרנז'ית

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$$

ועלינו גם להוסיף לכוח הגרביטציה כוחות שנובעים מלחץ, כלומר $\vec{\nabla}P$. בסה"כ נקבל:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + 2H\vec{v} + \frac{\ddot{a}}{a}\vec{x} = -\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \vec{\nabla}\phi\right)}$$

וזו משוואות אוילר בקורדינטות co-moving!

כעת ניקח את משוואות הרצף ומשוואות אוילר, נניח הפרעות קטנות סביב מצב התחלתי: ① $\vec{V}_0 = 0$ (יש רק Hubble Flow)

② ρ_0, P_0 לא תלויים ב- $\vec{x}$.

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + 3H\rho_0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial a} = -3\frac{\rho_0}{a}$$

$$\boxed{\rho_0 \propto a^{-3}}$$

מקבלים: $0 = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + 3H\rho_1 + \rho_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{v}$

$$\Downarrow$$

נגדיר $\delta = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\rho_1}{\rho_0}$ ונקבל:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \delta\frac{\partial \ln \rho_0}{\partial t} + 3H\delta + \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial \delta}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0}$$

$$\boxed{\ddot{a}a\vec{x} = -\vec{\nabla}\phi_0}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\phi_0 = -\frac{GM}{a^2 x^3}\vec{x}}$$

(M הוא המסה הגרביטציונית בעצם רואים את זה ככל הנראה כבר בקיום של משוואות Friedmann)

ממשוואות אוילר נקבל:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2H\vec{v} = -\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}P_1 + \vec{\nabla}\phi_1\right)$$

מכאן ניתן להפעיל רוטור לשני האגפים ולהגדיר את הערבוליות $\vec{\omega} = \vec{\nabla}\times\vec{v}$

נקבל: $\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = -2H\vec{\omega}$

ולכן $\vec{\omega}$ דועך עם הזמן ונוכל להניח שהוא זניח $\omega \simeq 0$.

לכן, $\vec{V}$ צריכה פוטנציאל ונרשום

$$\boxed{\vec{V} = \vec{\nabla}\psi} \Longrightarrow \boxed{\vec{\nabla}\left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + 2H\psi + \frac{1}{a^2}\left(\frac{P_1}{\rho_0} + \phi_1\right)\right] = 0}$$

הגורם בתוך הסוגריים תלוי רק ב- t.

הוספה $f(t)$ ל- ψ לא משנה את הפיזיקה (את ∇)

ולכן, ע"י כיול מתאים, נוכל לומר:

$$\boxed{\frac{\partial\psi}{\partial t}+2H\psi+\frac{1}{a^2}\left(\frac{P_1}{\rho_0}+\phi_1\right)=0}$$

ביצוע טרנספורם פורייה למשוואות הרציפות נותן

$$\boxed{\frac{\partial\delta_k}{\partial t}=k^2\psi_k}$$

ולכן, במשוואת אוילר נקבל:

$$\boxed{\frac{\partial^2\delta_k}{\partial t^2}+2H\frac{\partial\delta_k}{\partial t}+\frac{k^2}{a^2}\left(\frac{P_{1k}}{\rho_0}+\phi_{1k}\right)=0}$$

כעת עלינו להניח משהו אודות הקשר בין P_{1k} לבין δ_k (או לחילופין ρ_{1k}).

עקרונית יש כמה אפשרויות, תלוי אם ההפרעות איזותרמיות, אדיאבטיות או Iso-curvature (עקמומיות קבועה).

מודלים אינפלציוניים ותצפיות מה- CMB נותנים הפרעות אדיאבטיות, ולכן נוכל לומר $\boxed{P_{1k}=c_s^2\rho_0\delta_k}$ כאשר c_s זו מהירות הקול.

סה"כ נקבל:

$$\boxed{\frac{\partial^2\delta_k}{\partial t^2}+2H\frac{\partial\delta_k}{\partial t}+\left[\frac{k^2}{a^2}c_s^2-4\pi G\rho_0\right]\delta_k=0}$$

כשהשתמשנו גם במשוואת פואסון שנותנת $\boxed{a^{-2}\nabla^2\phi_1=4\pi G\rho_1}$

משוואה זו ראיתם בכיתה ובתרגיל בית.

שימו לב שזה לא תקף בנוכחות נוזלים יחסותיים, שיכולים לבצע אינטראקציות עם הנוזל הלא יחסותי למשל ע"י פיזור תומפסון.

אבל, קבוע כך תקף במערכות קבוע קוסמולוגי, כל עוד לוקחים $\rho \equiv \rho_m + \rho_\Lambda$.

לכל מודל קוסמולוגי, אם כך, ידועים H, ρ_0, C_s כתלות בזמן, ולכן ניתן לפתור את המשוואה באופן כללי, עבור יקום נשלט חומר + קבוע קוסמולוגי.

כשמתבוננים בהפרעות על אורכי גל ארוכים (Large-Scale) אז' $k \to 0$ וניתן להזניח את האיבר שהולך כמו k^2.

במקרה זה, עבור יקום שנשלט חומר שבו $\boxed{H = \frac{\dot a}{a} = \frac{2}{3t}}$ ולכן $\boxed{4\pi G \rho_0 = \frac{2}{3t^2}}$ (שקול לכך ש: $\rho_0 = \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$)

ראינו שפתרון המשוואה נותן:

$$\boxed{\delta_k = \underbrace{A t^{2/3}}_{\text{Growing Mode}} + \underbrace{B t^{-1}}_{\text{Decaying Mode}}}$$

ביקום נשלט קבוע קוסמולוגי, $H = const$ ומתקיים: $4\pi G \rho_0 = \frac{3}{2} H^2 \Omega_m$

זה נהיה זניח מאוד מהר (Ω_m נהיה קטן).

ולכן המשוואה היא:

$$\frac{\partial^2 \delta_k}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \delta_k}{\partial t} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\delta_k = \alpha + \beta e^{-2Ht} \xrightarrow[Ht \gg 1]{} const$$

ובזמנים מאוחרים,

δ הולך לקבוע (Cosmic Freeze Out).

כלומר, לפני $z = 0.5$, כשהיקום נשלט חומר: $\delta_{(t)} \propto a_{(t)} \propto t^{2/3}$

ולאחר מכן, כשיש קבוע קוסמולוגי, מקבלים $\delta \to const$.

מגדירים Growth Factor $g_i \equiv \frac{\delta_0(t)}{\delta_0(t_i)}$

בתור הפקטור שבו גדל הפלוקטואציה עבור $k=0$

(סקלות גדולות), יחסית לזמן התחלתי.

לרוב ההיסטוריה של היקום $0.5 \lesssim z \lesssim 3000$

מתקיים $g_i \simeq a(t)$.

עבור $z<0.5$, g גדל לאט יותר (Freeze Out)

ואילו a גדל מהר יותר (גידול אקספוננציאלי).

אבל גם היום, Λ משפיע על g רק ברמת ה-10%