נושאי התרגול:

I מבוא לטנזורים

II הפיתוח המולטיפולי

I מבוא לטנזורים

טנזור: הוא מושג שמופיע באופן טבעי כאשר אנו מתעסקים בשינוי קואורדינטות. נניח שאנו עובדים במערכת צירים x,y,z ואנו רוצים לבצע סיבוב של המרחב כדי לעבור למערכת x',y',z'. אזי אנו יודעים כי:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad (1)$$

כאשר R מט' אורתוגונלית: $R\in O(3)$. דרך אחרת לרשום זאת הוא שאם נסמן כרגיל $\bar{r}=(x,y,z)=(x_1,x_2,x_3)$ אזי:

$$(1^*) \qquad x'_i=\sum_j R_{ij}x_j \quad \text{או} \quad \vec{r}\,'=R\cdot\vec{r}$$

הסיבה שהחוק (1) חשוב הוא בגלל שאנו יודעים שכל משוואות התנועה במערכת נשמרים תחת הסיבוב R, אם אנו משתמשים ב x'_i במקום ב x_i כדי לבטא אותם (או ב $\vec{r}\,'$ במקום $\vec{r}$).

אנו נוהגים לומר שהמיקום $\vec{r}$ של חלקיק עובר תחת סיבובים כמו וקטור (בגלל התכונה (1)). דוגמאות אחרות לוקטורים: התנע $\vec{p}$, מומנט הדיפול $\vec{p}$, התנע הזויתי $\vec{L}$ (האם זה נכון במפורש?)

ניתן להכליל את הרעיון הזה גם לעצמים בעלי 2 אינדקסים. כך נאמר כי M_{ij} הוא טנזור מדרגה 2 אם תחת סיבוב R של הצירים משוואות התנועה נשמרות כאשר:

$$(2) \qquad M'_{ij}=\sum_k\sum_l R_{ik}R_{jl}M_{lk}$$

שימו לב כי היות ו $R=R^T$, ניתן לנסח את (2) כך:

$$(2^*) \qquad M'=RMR^T$$

דוגמאות לטנזורים מדרגה 2 הם: מומנט (טנזור) האינרציה $I_{ij}=\int d^3r\,\rho(\vec r)[r^2\delta_{ij}-r_ir_j]$

שפגשתם במכניקה אנליטית, הטנזור הדיאלקטרי שעוד תפגשו, וכמובן טנזור הקוודרופול.

ניתן להכליל את הרעיון כמובן. טנזור מדרגה m יעבור תחת סיבובים כך:

$$(3)\qquad T'_{i_1 i_2 i_3\cdots i_m}=\sum_{j_1}\sum_{j_2}\cdots\sum_{j_m}R_{i_1j_1}\cdots R_{i_mj_m}T_{j_1j_2\cdots j_m}$$

<u>שאלה:</u> מהו טנזור מדרגה 0? <u>תשובה:</u> סקלר!

כדאי להעיר בשלב זה שלמעשה ישנם 2 סוגים של טנזורים: כאלה שחוק הטרנס' שלהם הוא R, וכאלה שהחוק עבורם הוא R^{-1}. אנו ניגע בזה יותר לעומק כשנגיע ליחסות.

II הפיתוח המולטיפולי

בכיתה, ראינו שניתן לתאר את הפוטנציאל מהתפלגות מטען כלשהי, בתנאי שאנו נמצאים מחוץ להתפלגות, באמצעות הפיתוח:

$$(4)\qquad \phi(\vec r)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{1}{r^{l+1}}\sum_{m=-l}^{l}q_{lm}Y_{lm}(\theta,\phi)$$

כאשר:

$$(5)\qquad q_{lm}=\int d^3r'\,Y^*_{lm}(\theta',\phi')\,r'^l\rho(\vec r')\,d^3r'$$

ראינו, כי ניתן לתת לאיברים הראשונים בטור הסבר מאוד פשוט בקו' קרטזיות:

$$(6)\qquad \phi(\vec r)=\frac{q}{r}+\frac{\vec p\cdot\vec r}{r^3}+\frac{1}{2}\sum_{ij}Q_{ij}\frac{r_ir_j}{r^5}+\cdots$$

נזכיר את החישוב של המומנטים.

<u>שאלה:</u> מצאו את הפוטנציאל מדיסקה טעונה אחיד במטען q ברדיוס R.

<u>פתרון:</u> נרשום את התפלגות המטען:

$$(7)\qquad \rho(\vec r)=\frac{q}{\pi R^2}\Theta(R-r)\,\delta(z)$$

$$(8)\Rightarrow\qquad q_{lm}=\int Y^*_{lm}(\theta,\phi)\,r^l\rho(\vec r)\,d^3r=\int Y^*_{lm}(\theta,\phi)\,r^l\frac{q}{\pi R^2}\Theta(R-r)\,\delta(z)\,d^2r\,dz$$

$$= \frac{q}{\pi R^2} \int r\,dr\, r^l\, \Theta(R-r) \int d\phi\, Y^*_{lm}(\tfrac{\pi}{2},\phi)\, d\phi$$

$$= \frac{q}{\pi R^2} \frac{R^{l+2}}{l+2} \int d\phi\, P_l^m(0)\, e^{im\phi} A_l^m\, d\phi$$ ← מתאפס לכל $m\neq 0$

קבוע נרמול

$$= \frac{q}{\pi} \frac{R^l}{l+2} \delta_{m0} P_l(0) A_l^0\, 2\cancel{\pi}$$

אולם, כפי שמספר זוגי לכן התרגיל בית $P_l(0)=0,5$ לכל l אי"ז.

לכן:

$$(9) \quad \Phi(\vec{r}) = 2q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^{2l}}{2l+2} \sqrt{\frac{4\pi}{4l+1}}\, P_{2l}(0) \frac{Y_{2l,0}(\theta,\phi)}{r^{2l+1}}$$

$A_l^0 = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$ שונש

$$= 2q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^{2l}}{2l+2} \frac{P_{2l}(\cos\theta)}{r^{2l+1}}$$

אם נפתח באת 2 ל האיברים המובילים נקבל:

$$(10) \quad \Phi_0 = 2q \frac{R^0}{0+2} \frac{\overbrace{P_0(\cos\theta)}^{=1}}{r^{0+1}} = \frac{q}{r}$$

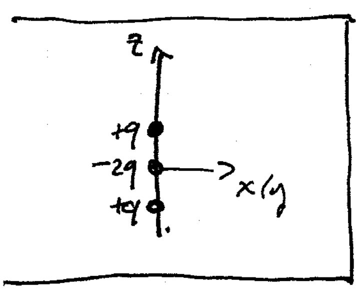
$$\Phi_1 = 0$$

$$\Phi_2 = 2q \frac{R^2}{2+2} \frac{P_2(\cos\theta)}{r^3} = \frac{R^2}{4r^3}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$= \frac{R^2}{4r^5}(3z^2 - r^2)$$

<u>שאלה</u>: נתונה צפיפות המטען הבאה:

$$\rho(\vec{r}) = q[\delta(z-a) + \delta(z+a) - 2\delta(z)]$$



מהו הפוטנציאל בסדר המוביל?

<u>פתרון</u>: קל לראות שמומנט הדיפול מתאפס.

נחשב את מומנט הקוודרופול לפי קוד קרטזיות:

$$(11) \quad Q_{ij} = \int d^3r\, \rho(\vec{r}')(3r_ir_j - r^2\delta_{ij})$$

$$= -q\delta_{ij}(2a^2) + \int d^3r'\, \rho(\vec{r}')(3r_ir_j)$$

האיבר השני

קל לראות מסימטריה שרק $r_ir_j = z^2$ נותן איבר שאיננו אפס.

$$(12) \quad \Rightarrow Q_{zz} = -q(2a^2) + q\,6a^2 = 4qa^2$$

$$Q_{xx} = Q_{yy} = -2qa^2$$

(13) $\Phi = \frac{1}{2}\sum_{ij} Q_{ij} r_i r_j \cdot \frac{1}{r^5}$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2qa^2(2z^2-x^2-y^2)$$

$$= qa^2(3z^2-r^2)$$

בדיוק כמו הדיסקה (באופן לא מפתיע במיוחד).

<u>שאלה</u>: חשבו את מומנט הדיפול מכדור ברדיוס R הטעון במטען $\rho=\rho_0 z$ לכל $r\le a$:

<u>פתרון</u>: נרשום את התפלגות המטען באמצעות Y_{lm}:

$$\rho(\vec r) = \rho_0 z = \rho_0 r\cos\theta\,\Theta(R-r) = \rho_0 r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,Y_1^0(\theta,\phi)\,\Theta(r-R)$$

לכן:

$$q_{1m} = \int_0^R\!\!\int\!\!\int \rho_0 r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,Y_1^0(\theta,\phi)\cdot r^1\,Y_1^{m*}(\theta,\phi)\,r^2\,dr\,d\Omega$$

שימו לב כי לכל $m\neq 0$ האינטגרל מתאפס (מה שסביר. מסימטריה).

לכן:

$$q_{1m} = \delta_{m0}\,\rho_0\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\int_0^R r^4\,dr\int |Y_1^0|^2\,d\Omega$$

$$= \delta_{m0}\,\rho_0\sqrt{\frac{4\pi}{75}}\,R^5$$

כאשר נשווה את q_{10} ל-p_z נקבל:

$$p_z = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,q_{10} = \frac{4\pi}{15}R^5\rho_0$$