מכניקה קלאסית - תרגול 14

גוף צפיד

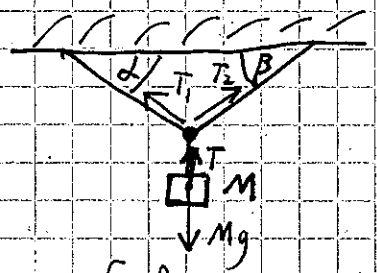
גוף צפיד זהו מונח דומה למה שקוראים בספרות היומיום "גוף קשיח", או "גוף מוצק". ההגדרה המתמטית היא גוף

~~[illegible]~~

שהמרחק בין כל 2 חלקיקים שלו קבוע בזמן. לא מאפשרים תזוזות של צורת הגוף ע"י מתיחה / כיווץ / ליפוף וכו'.
נרצה לנתח תנועה של גוף כזה, כאשר נרשה לגוף להסתובב.
אך לפני שניגש לטפל בדינמיקה של גוף קשיח, נדון בסטטיקה של גוף קשיח, כלומר מתי גוף כזה לא זז?

(I) סטטיקה של גוף צפיד

כאשר דיברנו על מסות נקודתיות, שלא יכלו להסתובב סביב עצמן, היה לנו את חוק ניוטון ה-I שקבע כי גוף יתמיד במהירות קבועה (או כמקרה פרטי, "ישאר סטטי" בשיווי משקל) אם ורק אם סכום הכוחות החיצוניים הפועלים עליו יהיה אפס:



שיווי משקל $\Longleftrightarrow \sum \vec{F} = 0$

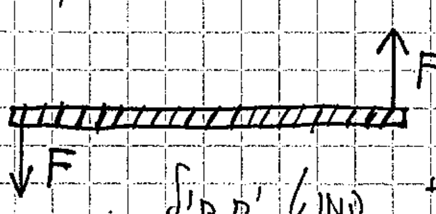
$\Downarrow$

$$\begin{cases} Mg = T \\ T = T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta \\ T_2 \cos\beta - T_1 \cos\alpha = 0 \end{cases}$$

שיווי משקל של M

שיווי משקל של נקודת החיבור.

אבל, ברגע שהגוף יכול גם להסתובב, זה כבר לא המצב:



עבור המוט הנ"ל, $\sum \vec{F} = 0$
אבל ברור כי המצב אינו סטטי. המוט יתחיל להסתובב סביב

המרכז שלו. למעשה הדבר נובע מכך שסכום המומנטים שפועלים על הגוף אינו אפס. למשל, אם אורך המוט הוא L, אז המומנט הכולל סביב מרכז המוט הוא:

$$\vec{\tau}_{tot}=\sum \vec{r}\times\vec{F} = \left(\tfrac{1}{2}L\hat{x}\right)\times\left(F\hat{y}\right)+\left(\tfrac{1}{2}L(-\hat{x})\right)\times\left(F(-\hat{y})\right)=LF(\hat{x}\times\hat{y})=LF\hat{z}$$

קיבלנו מומנט מחוץ לדף, בהתאם לכלל יד ימין עם הסיבוב המדובר. קיומו של מומנט $\neq 0$ נותן לנו תנע זוויתי שגדל עם הזמן וזה גורם לסיבוב:

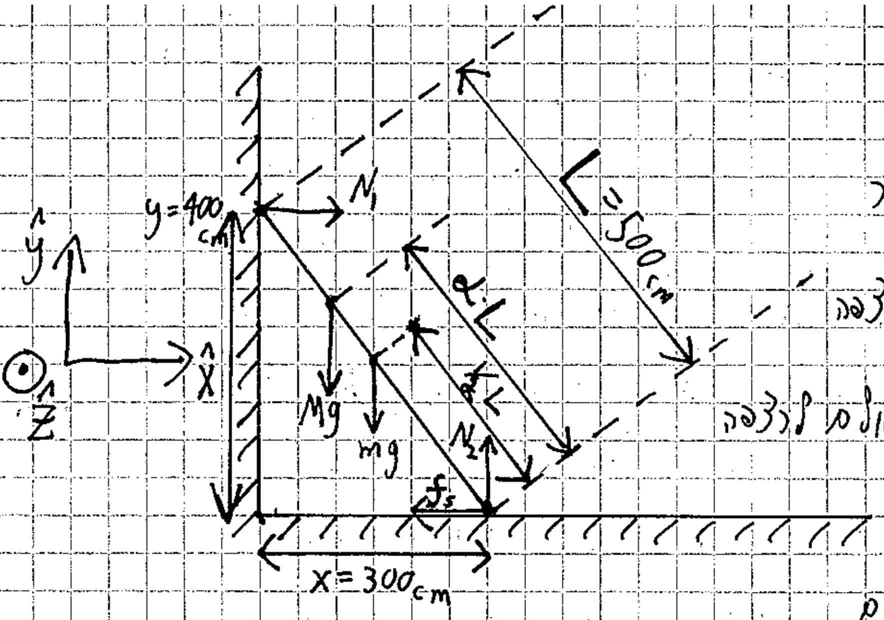
$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{\tau}}$$

מסקנה: כדי שגוף קשיח יישאר בשיווי משקל נדרוש: $\sum\vec{F}=0$ וגם $\sum\vec{\tau}=0$

[redacted] איפוס הכוחות יבטיח לכך שמרכז המסה של הגוף לא יזוז ואיפוס המומנטים מבטיח לנו שהגוף לא יתחיל להסתובב.

נשים לב שניתן לאפס את המומנט הכולל סביב כל ראשית שנבחר, כי אם אני לא מסתובב סביב ציר מסוים, אני גם לא מסתובב סביב ציר אחר.

דוגמא: סולם בעל מסה $m=10^4 gr$ שאורכו $L=500_{cm}$, מושען על קיר אנכי חלק כך שרגליו נמצאות במרחק $X=300_{cm}$ מהקיר. מקדם החיכוך בין הסולם לרצפה הוא $\mu=0.6$. אדם במסה $M=8\times10^4 gr$ מתחיל לטפס על הסולם. מהי הנקודה הגבוהה ביותר שהאדם יכול להגיע אליה על הסולם לפני שהסולם יחליק?



<u>סימונים:</u>

N_1: הכוח בין הסולם לקיר

N_2: הכוח בין הסולם לרצפה

f_s: חיכוך סטטי בין הסולם לרצפה

α: חלק יחסי מהסולם
שמצליח לעלות הזקן.

כדי שהמערכת תישאר סטטית, נדרוש

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = 0 \\ \sum \vec{\tau} = 0 \end{cases}$$

<u>איפוס כוחות נותן:</u>

$$N_1(+\hat{x}) + Mg(-\hat{y}) + mg(-\hat{y}) + N_2(+\hat{y}) + f_s(-\hat{x}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(M+m)g = N_2$$

$$\boxed{N_1 =} f_s \boxed{\leq} f_{s,max} = \mu \cdot N_2 = \boxed{(M+m)\cdot\mu\cdot g = N_{1,max}}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = -\vec{F} \times \vec{r}$$

<u>איפוס מומנטים נותן:</u>

צריכים קודם להחליט סביב איזו נקודה מודדים את המומנטים.
מכיוון שסביב נקודת המגע בין הסולם לרצפה יש 2 כוחות,
אם נבחר נקודה זו בתור הראשית, נאפס 2 מומנטים (כי
הכוח יעבור דרך הציר ולכן $\vec{r}=0$ בביטוי $\vec{r}\times\vec{F}$).

<u>נקבל אם כן:</u>

$$-\vec{\tau} = (+N_1, 0, 0) \times (-x, y, 0) + (0, -Mg, 0) \times (-\alpha x, \alpha y, 0)$$
$$+ (0, -mg, 0) \times (-\tfrac{1}{2}x, \tfrac{1}{2}y, 0) = (0, 0, N_1 y - \alpha Mgx - \tfrac{1}{2}mgy)$$

<u>דרך אחרת לחישוב המומנט</u>: ברור שהסיבוב יהיה סביב ציר שניצב
לדף. נסתכל על כל כוח ונחליט אם הכוח הזה שואף לסובב את
הסולם סביב ציר העובר דרך הראשית שבחרנו עם כיוון השעון
או נגד כיוון השעון. נגד כיוון השעון מקבל סימן +, עם

כיוון הסיבוב: מקבל סימן − (לפי כלל יד ימין היות ו- $\hat{z}$ מחוץ לדף).

לכן, N_1 יבואו עם סימן −, (Mg, mg) יבואו עם סימן +

אנו צריכים להכפיל כל כוח בזרוע שלו, כלומר המרחק (רכיב) בין נקודת הפעלת הכוח לבין הראשית, בניצב לכוח.

את N_1 נכפיל ב- y

את Mg ב- αx

את mg ב- $\frac{1}{2}x$

$$\Longrightarrow \vec{\tau} = \left(\alpha Mgx + \tfrac{1}{2}mgx - N_1 y\right)\hat{z}$$

$$\vec{\tau} = 0 \Longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{N_1 y}{Mgx} - \frac{1}{2}\frac{m}{M}} \leq \frac{N_{1,max}}{Mg}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\frac{m}{M}$$

נציב את $N_{1,max}$ ממקודם ונקבל:

$$\alpha_{max} = \frac{(M+m)\mu}{M}\cdot\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\frac{m}{M} = \ldots = 0.8375 = \frac{67}{80}$$

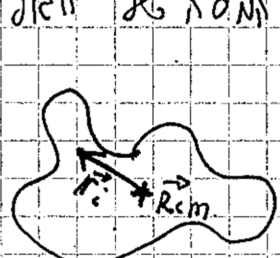
II דינמיקה של גוף צפיד

מומנט ההתמד

נרצה כעת לנתח תנועה של גוף צפיד במרחב.

מההגדרה של גוף צפיד, המרחקים בין החלקיקים המרכיבים אותו לא יכולים להשתנות. מכאן, התנועה הכללית ביותר של גוף צפיד מורכבת מתנועת מרכז המסה של הגוף במהירות $\vec{V}_{cm}$, וסיבוב סביב מרכז המסה.

נתבונן בבעיה במערכת הצמודה למרכז המסה של הגוף. במערכת זו, נסמן את מיקומו של כל חלקיק ב- $\vec{r}_i$



נניח כי בנוסף לתנועת מרכז המסה $\vec{V}_{cm}$, יש סיבוב סביב מרכז המסה בתדירות זוויתית $\vec{\omega}$. נתמקד במקרים בו ציר הסיבוב הוא קבוע, ונבחר את ציר $\hat{z}$ להיות במקביל לציר ⟸ $\boxed{\vec{\omega} = \omega \hat{z}}$

במערכת שמסתובבת יחד עם הגוף: $\left.\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right|_{S'} = 0$ ולכן

במערכת האינרציאלית: $\boxed{\left.\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right|_{S} = \vec{\omega}\times\vec{r}_i}$

לשם נוחות, נפרק את הוקטורים $\vec{r}_i$ לרכיב במקביל ל-$\vec{\omega}$, שנסמנו $\vec{r}_{i,\parallel} = r_{i,z}\hat{z}$, ורכיב במישור הניצב לציר הסיבוב: $\vec{r}_{i,\perp} = r_{i_x}\hat{x} + r_{i_y}\hat{y}$. ⟸ $\boxed{\vec{r}_i = \vec{r}_{i_\parallel} + \vec{r}_{i_\perp}}$

~~[illegible] $\vec{V}_{cm}$ [illegible]~~

~~[illegible] $\vec{\omega}\times\vec{r}_i$ [illegible]~~

לכן $\vec{\omega}\times\vec{r}_i = \vec{\omega}\times\vec{r}_{i_\perp}$ ונקבל עבור האנרגיה הקינטית של הגוף במערכת מרכז המסה שלו:

$$\boxed{E_k} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\,\omega^2 r_{i_\perp}^2 = \boxed{\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i r_{i_\perp}^2\right)\omega^2}$$

נגדיר את מומנט ההתמד $I = \sum_i m_i r_{i_\perp}^2 \longrightarrow \iiint_V \rho r_\perp^2\, dV$

ונקבל: $\boxed{E_k = \frac{1}{2}I\omega^2}$

I זה בעצם אנלוג למסה בתנועה סיבובית. ככל ש-I יותר גבוה, צריכים להשקיע יותר אנרגיה כדי לגרום לגוף להסתובב סביב עצמו בתדירות ω נתונה.

אם היינו פותרים את הבעיה למעלה לא במערכת מרכז המסה, אלא במערכת אינרציאלית שבה מרכז המסה נע במהירות $\vec{V}_{cm}$, היינו מקבלים אנרגיה כוללת: $\boxed{E_k = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2}$

כלומר האנרגיה הקינטית של גוף מורכבת מתנועה של מרכז המסה ותנועה סיבובית סביב מרכז המסה.

<u>מה לגבי התנ"ז?</u> התנ"ז סביב מרכז המסה (הוז):

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_{i\perp} + \vec{r}_{i\parallel}) \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i\perp}) \cdot m_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{i\perp} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i\perp}) + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{i\parallel} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i\perp})$$

נשתמש בנוסחה פכוויתם בגבר: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B})$

$$\Downarrow$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i \Big[\vec{\omega} \cdot \underbrace{(\vec{r}_{i\perp} \cdot \vec{r}_{i\perp})}_{r_{i\perp}^2} - \vec{r}_{i\perp} \cdot \underbrace{\cancel{(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{i\perp})}}_{0} + \vec{\omega} \cdot \underbrace{\cancel{(\vec{r}_{i\parallel} \cdot \vec{r}_{i\perp})}}_{0} - \vec{r}_{i\perp} \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{i\parallel})}_{\omega \cdot r_{i\parallel}} \Big]$$

מאונכות $\vec{r}_{i\parallel}, \vec{r}_{i\perp}$ מקבילות $r_{i\parallel}$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i r_{i\perp}^2 \vec{\omega} - \sum_{i=1}^{N} m_i r_{i\parallel} \omega \cdot \vec{r}_{i\perp}$$

$$\boxed{\vec{L} = I \vec{\omega} - \sum_{i=1}^{N} m_i r_{i\parallel} \omega \cdot \vec{r}_{i\perp} = \vec{L}_{\parallel} + \vec{L}_{\perp}}$$

<u>לתנע הזוויתי יש 2 תרומות:</u> (1) רכיב במקביל ל-$\vec{\omega}$ שהוא $\vec{L}_{\parallel} = I\vec{\omega}$

(2) רכיב בניצב ל-$\vec{\omega}$ שהוא איננו אפס. $\vec{L}_{\perp}$

נשים לב אבל ש- $\vec{L}_{\parallel}$ קבוע בזמן! לעומת זאת $\vec{L}_{\perp}$ <u>לא</u> קבוע בזמן באופן כללי, כי $\vec{r}_{i\perp}$ משתנה בכיוון. לכן המומנטים שפועלים על הגוף מקיימים:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_{\perp}}{dt}$$

לכן לא יהיו מומנטים אם ורק אם $\vec{L}_{\perp} = 0$ <u>מתאפס</u>!

$\vec{L}_\perp$ בהתאם למשל: (1) כאשר $\vec{r}_{i_\perp}=0$ כלומר הגוף חד מימדי
ומסתובב סביב ציר (אולם במקרה זה גם $\vec{L}_H=0$ כי $I=0$)
(2) $r_{i_\parallel}=0$ כלומר הגוף שטוח ומסתובב סביב ציר שניצב אליו.
(3) כאשר הגוף סימטרי ביחס לציר הסיבוב ולכן לכל $\vec{r}_{i_\perp}$ יש
גם $-\vec{r}_{i_\perp}$ באותה מסה m_i ובאותו מרחק מקבילי $r_{i_\parallel}$.
אנחנו נמקד את הדיון שלנו במקרים שבהם $\vec{L}_\perp=0$
מסיבה זו או אחרת ולכן נקבל:

$$\boxed{\vec{L}=I\vec{\omega}=\vec{L}_\parallel}$$

נקבל אנלוגיה מעניינת בין תנועה סיבובית לבין תנועה של גוף נקודתי:

$$\theta \longleftrightarrow \vec{x}$$
$$\omega=\dot{\theta} \longleftrightarrow \dot{\vec{x}}=\vec{v}$$
$$\alpha=\dot{\omega}=\ddot{\theta} \longleftrightarrow \ddot{\vec{x}}=\dot{\vec{v}}=a$$
$$E_k=\frac{1}{2}I\omega^2 \longleftrightarrow E_k=\frac{1}{2}mv^2$$
$$I \longleftrightarrow m$$
$$\vec{L}=I\vec{\omega} \longleftrightarrow \vec{p}=m\vec{v}$$
$$\vec{\tau}=\dot{\vec{L}}=I\vec{\alpha} \longleftrightarrow \vec{F}=\dot{\vec{p}}=m\vec{a}$$

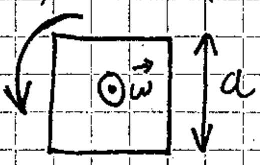
עבור גוף נקודתי שמסתובב במעגל ברדיוס R, אורך הקשת שהוא מכסה לאחר שינוי זווית θ הוא:

$$\boxed{x=R\cdot\theta}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\begin{array}{l} v=\dot{x}=R\dot{\theta}=R\omega \\ a=\dot{v}=R\dot{\omega}=R\alpha \end{array}}$$

ω	מהירות זוויתית
α	תאוצה זוויתית

דוגמאות לחישוב מומנט התמד

(1) ריבוע (הומוגני) שטוח (דק מאוד) בצלע a, סביב ציר שניצב אליו ועובר דרך מרכזו:



צפיפות המסה המשטחית של הריבוע: $\sigma = \frac{M}{a^2}$.

$$I = \iint \sigma \cdot r_\perp^2 \, dx\,dy$$

$r_\perp^2$ זה בעצם המרחק של הנקודה מציר הסיבוב. במקרה זה ציר הסיבוב הוא ציר $\hat{z}$, ונקבל $r_\perp^2 = x^2+y^2$.

תחום האינטגרציה הוא ע"פ שטח הריבוע:

$$-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}$$
$$-\frac{a}{2} \le y \le \frac{a}{2}$$
$$\Downarrow$$

$$I = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{M}{a^2}(x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$\frac{M}{a^2} \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy = \frac{M}{a^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{8} - \frac{-a^3}{8}\right) + y^2\left(\frac{a}{2} - \frac{-a}{2}\right)\right] dy$$

$$= \frac{M}{a^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{4} + a y^2\right) dy = \frac{M}{a^2}\left(\frac{a^3}{12} \cdot a + \frac{a}{3}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \left(\frac{-a}{2}\right)^3\right)\right) =$$

$$= \frac{M}{a^2}\left(\frac{a^4}{12} + \frac{a^4}{12}\right) = \boxed{\frac{Ma^2}{6} = I}$$

נשים לב שתמיד נצפה לקבל את מסת הגוף כפול גודל עם יחידות של שטח אופייני לגוף כפול מקדם נומרי.

(2) מומנט התמד סביב כדור הומוגני ברדיוס R.

רגע, סביב איזה ציר?!

זה לא משנה! כדור הוא סימטרי לחלוטין ולכן זה אומר לעלות בדיוק אותה אנרגיה לסובב אותו סביב ציר $\hat{x}$, סביב ציר $\hat{y}$ או סביב ציר $\hat{z}$. ננצל עובדה זו:

$$I = I_x = I_y = I_z$$

$$I_x = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho\cdot(y^2+z^2)\cdot r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$I_y = \iiint \rho(x^2+z^2)\cdot r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$I_z = \iiint \rho(x^2+y^2)\cdot r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$3\cdot I = I_x + I_y + I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho(2x^2+2y^2+2z^2)\cdot r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 2\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2\cdot r^2\cdot\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = 2\rho\cdot 4\pi\cdot\int_0^{R} r^4\, dr =$$

$$= \frac{8\pi\rho\cdot R^5}{5} = \frac{2}{5}\cdot 3\cdot\left(\frac{4\pi}{3}\rho R^3\right)\cdot R^2 = \boxed{\frac{6}{5}MR^2 = 3I}$$

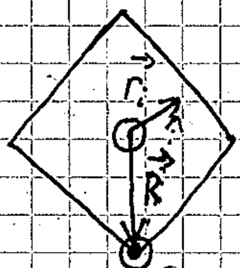
$$\Downarrow$$

$$\boxed{I = I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}MR^2}$$

משפט שטיינר (משפט הצירים המקבילים)

נניח שידוע לנו מומנט ההתמד I של גוף, סביב ציר שעובר דרך מרכז המסה שלו. נרצה לחשב את מומנט ההתמד של אותו הגוף I', סביב ציר מקביל לציר המקורי אבל שלא עובר דרך מרכז המסה שלו:

אם הוקטור שמחבר בין מרכז המסה של הגוף לבין נקודת החיבור של הציר החדש הוא $\vec{R}$, אז נקבל שבמערכת בה הראשית היא בציר החדש, וקטורי המיקום הם:



$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}$$

$$\Downarrow$$

$$I' = \sum_i m_i {\vec{r}'_{i\perp}}^2 = \sum_i m_i {\vec{r}_{i\perp}}^2 + \sum_i m_i R_\perp^2 - 2\vec{R}_\perp \sum_i m_i \vec{r}_{i\perp}$$

זה מתאפס, כי $\vec{r}_i$ זה במערכת מרכז המסה, שם $\vec{R}_{cm}=0$
(כי היא בראשית)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I' = I + M\cdot R_\perp^2}$$

משפט הצירים הניצבים

נניח גוף דק (קו-מישורי), במישור X-Y. כלומר $Z_i=0$ לכל i. אז:

$$I_x + I_y = \sum_i m_i (y_i^2+z_i^2) + \sum_i m_i (x_i^2+z_i^2) = \sum_i m_i y_i^2 + \sum_i m_i x_i^2 =$$

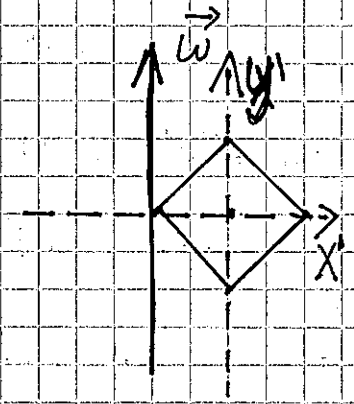
$$= \sum_i m_i (x_i^2+y_i^2) = I_z$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I_z = I_x + I_y}$$

מומנט ההתמד לסיבוב סביב ציר ניצב לגוף גדול ממומנט ההתמד סביב כל ציר במישור הגוף. לכן, כדי לסובב את הגוף בתדירות ω סביב ציר ניצב יעלה יותר אנרגיה

מלסובב אותו סביב ציר שעובר במישורו באותה תדירות!



דוגמה:

ריבוע שטוח בעל צלע a מסתובב סביב ציר שמקביל לאלכסון הראשי שלו ועובר דרך אחת הפינות.

מהו I?

$\Leftarrow$ אם נקח את I'_y לסיבוב סביב ציר y' (האלכסון הראשי) אז ממשפט שטיינר נקבל את I המבוקש.

מסימטריה, חייב לקיים $I'_x = I'_y$ (אותו מומנט לסיבוב סביב שני האלכסונים).

ממשפט הצירים הניצבים:

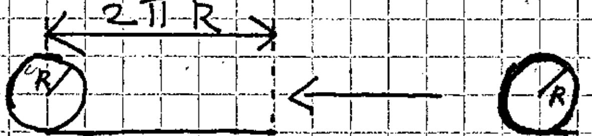
$$I'_x + I'_y = I'_z = \frac{Ma^2}{6}$$

חישבנו מקודם!

לכן: $I'_x = I'_y = \frac{Ma^2}{12}$

שכן: $\boxed{I =} I'_x + M\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \frac{Ma^2}{12} + \frac{Ma^2}{2} = \boxed{\frac{7}{12}Ma^2}$

גלגול ללא החלקה



אם נלפף חוט סביב גלגל ברדיוס R, ונגלגל את הגלגל על הרצפה כך שבכל רגע הגלגל מתגלגל סביב עצמו מבלי להחליק על הרצפה, נקבל שחוט באורך $2\pi R$ התפרס על הרצפה, לאחר הקפה שלמה של הגלגל סביב עצמו. הקפה זו נמשכה זמן

$$\boxed{V_{cm} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi R}{2\pi/\omega} = \omega R} \Leftarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

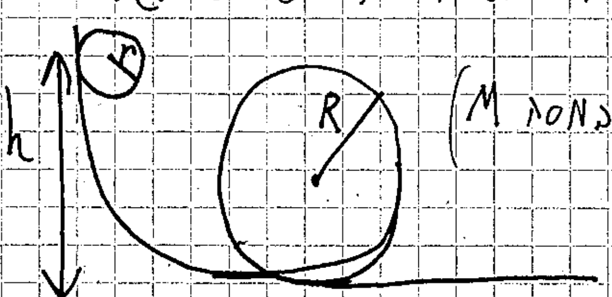
כאשר אף מתגלגל ללא החלקה, מהירות מרכז המסה שלו מקיימת $V_{cm} = \omega R$ כאשר ω זו המהירות הזוויתית של סיבוב סביב מרכז המסה, ו- R רדיוס הגוף.

<u>מה גורם לגלגול</u>: למעשה זהו <u>חיכוך סטטי</u> בין הרצפה לבין הנקודה התחתונה בגלגל שנוגעת ברצפה.
החיכוך הוא <u>סטטי</u>, כי <u>אין החלקה</u>. בכל רגע נקודה אחרת נוגעת ברצפה.

הרי מהירות מרכז הגלגל ביחס לרצפה היא $V_{cm} = \omega R$ <u>קדימה</u>. מהירות הנק' התחתונה ביחס למרכז המסה היא ωR <u>אחורה</u>. לכן מהירות הנק' התחתונה ביחס לרצפה היא: $V_{\text{נק' מגע}} = \omega R - \omega R = 0$

החיכוך הסטטי קובע את הנקודה התחתונה אחורנית, ובכך מפעיל מומנט $\tau = f_s \cdot R$ שממשיך את הגלגול.

<u>בנוסף</u>, מכיוון ש<u>אין</u> החלקה, כוח החיכוך פועל על נק' בגלגל <u>רגעית</u> <u>בלבד</u>, ולא לאורך קטע Δx. לכן, החיכוך לא מבצע עבודה $\Longleftarrow$ $W_{f_s} = \int f_s\, dx = 0$. לכן יש שימור אנרגיה (בהיעדר כוחות לא משמרים נוספים).



<u>דוגמה:</u>
מאיזה גובה h יש להפיל כדור ברדיוס r (ובמסה M) כדי שיעבור את הלולאה ברדיוס R?

<u>בהתחלה</u>: התנאי הגבולי לניתוק הגוף זה שהכוח הנורמאלי בינו לבין המסילה <u>מתאפס</u> בקודקוד הלולאה.

כלומר כוח הגרביטציה Mg מספק את הכוח הצנטריפטלי:

$$m\frac{V^2}{R} = mg \Longrightarrow \boxed{V_{cm} = \sqrt{Rg}}$$

שיא הגובה

משימור אנרגיה לאורך המסילה (גרביטציה משמר, חיכוך סטטי לא מבצע עבודה) נקבל

$$\boxed{Mgh = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Mg\cdot 2R}$$

כאשר $V_{cm} = \sqrt{Rg}$.

עבור מסה נקודתית, האיבר השני באגף ימין מתאפס ומקבלים $h = \frac{5}{2}R = 2.5R$.

עבור הכדור, $I = \frac{2}{5}MR^2$, $\omega = \frac{V_{cm}}{R} = \sqrt{\frac{g}{R}}$

$$\Downarrow$$

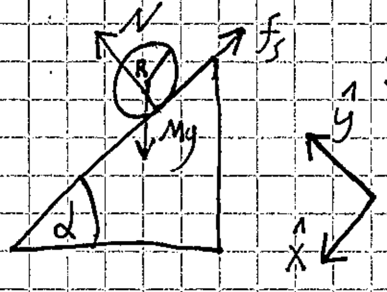
$$\cancel{Mg}h = \frac{1}{2}\cancel{M}\cancel{g}R + \frac{1}{5}\cancel{M}R^2\frac{\cancel{g}}{R} + 2\cancel{Mg}R$$

$$\boxed{h =} \frac{1}{2}R + \frac{1}{5}R + 2R = \boxed{2.7R}$$

הגובה ההתחלתי יותר גבוה כי חלק מהאנרגיה הולכת לגלגול!

<u>קולאכן:</u>

מהי התאוצה כדור ברדיוס R במורד שיפוע בזווית α?



עבור מסה נקודתית, התאוצה היא $g\sin\alpha$.

<u>כאן:</u> $\sum F_y = N - Mg\cos\alpha = 0 \Longrightarrow N = Mg\cos\alpha$

$$\sum F_x = Mg\sin\alpha - f_s = Ma$$

$$\boxed{f_s = M(g\sin\alpha - a)}$$

אבל, החיכוך הוא גם גורם לסיבוב הוא מפעיל מומנט:

$$\tau = f_s R = I\alpha = I\frac{a}{R}$$

N • לא מפעיל מומנט כי הוא רדיאלי $\vec{F} \parallel \vec{r} \Rightarrow \vec{r}\times\vec{F}=0$

Mg • לא מפעיל מומנט כי הוא פועל על מרכז המסה $\vec{r}=0$

$$a = \frac{f_s R^2}{I} = \frac{M(g\sin\alpha - a)R^2}{I}$$

$$a\left[1+\frac{MR^2}{I}\right] = \frac{Mg\sin\alpha\, R^2}{I}$$

$$\boxed{a=} \frac{MR^2\cdot g\sin\alpha}{I+MR^2} = \boxed{g\sin\alpha\cdot\frac{1}{1+\frac{I}{MR^2}}}$$

עבור כדור הומוגני: $\frac{I}{MR^2}=\frac{2}{5}$

$$\boxed{a=\frac{5}{7}g\sin\alpha < g\sin\alpha}$$

תאוצת מרכז המסה קטנה יותר כי יש גם סיבוב סביבו!!