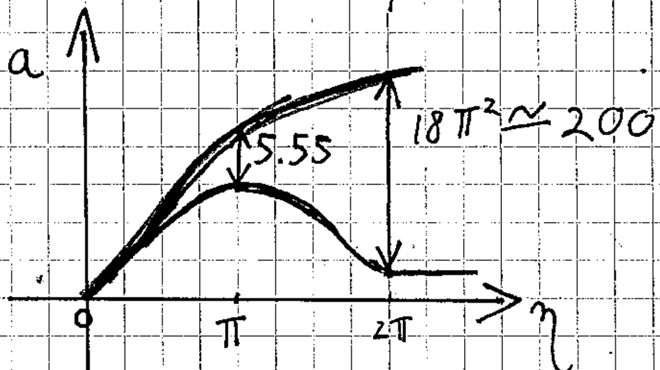
# קוסמולוגיה - תרגול 8

## Press Schechter and EPS Theory

- נתחיל בתזכורת של דברים שראיתם בהרצאה, עם קצת יותר פירוט. הנושא הראשון הוא התורה המקורית של Press ושל Schechter משנת 1974.
- המטרה שלהם הייתה למצוא את מספר ההילות הויריאליות ליחידת נפח, ליחידת מסה (כלומר כמה הילות בתחום המסות $[M, M+dM]$ יש ליחידת נפח ביקום).
- כפי שראינו, בזמנים מוקדמים הפלוקטואציות בצפיפות הן קטנות: $\delta_{(\vec{x})} \equiv \frac{\rho_{(\vec{x})}-\rho_0}{\rho_0} \ll 1$ ולכן משתמשים בתורה לינארית
- ראינו שפלוקטואציות אלו גדלות עם הזמן בגלל הגרביטציה: $\delta(\vec{x},t)=\delta_0(\vec{x})\frac{D(t)}{D_0}$ כאשר $D(t)$ הוא פתרון ה- growing mode
- כשההפרעה גדלה לשלב שבו $\delta \sim 1$, התורה הלינארית כבר לא תקפה. ראיתם בהרצאה ובתרגיל בית מספר 4 את מודל ה- Top Hat (שקוראים לו גם spherical Collapse)
- במודל זה, ההפרעות ספיריות לצפיפות מתנהגות כמו תת-יקום סגור, שמתפשט תחילה עם היקום האמיתי עד שבשלב מסוים הוא מגיע להתפשטות מקסימלית ואז מתחיל לקרוס (Turn around).




$$\delta(\eta_p=2\pi)=\delta(\eta_p\ll1)\left[\frac{t(\eta_p=2\pi)}{t(\eta_p\ll1)}\right]^{2/3}$$

כאשר: $t(\eta)=a^*(\eta-\sin(\eta))$

וכפי שראיתם בתרגיל בית 4 התוצאה היא:

$$\delta(\eta_p=2\pi)=\frac{3}{20}\eta_p^2\left[\frac{2\pi}{\eta_p^3/6}\right]^{2/3}$$

$$=0.15(12\pi)^{2/3}\simeq\boxed{1.68\equiv\delta_c}$$

אם היינו מתעלמים משלב ה-Turn around והוירואליזציה ומניחים כי התורה הליניארית תקפה לכל אורך הדרך, אז היינו מוצאים שבשלב שההפרעה הגיעה לשיווי משקל ויריאלי, ההפרעה הליניארית בצפיפות מגיעה לערך של

$$\delta = \delta_c \simeq 1.68$$

מעתה, נעבוד רק בתורה ליניארית, ונאמר על הפרעה שקרסה והגיעה לשיווי משקל ויריאלי כאשר $\delta = \delta_c$.

- בשלב הזה, כדי למדוד הפרעות, נגדיר סקלת אורך $R$. לסקלה זו שייכת מספר גל $k = \frac{2\pi}{R}$ וגם מסה אופיינית $M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0$.

- נמלא את היקום במלא כדורים ברדיוס $R$ ונמדוד בכולם את הצפיפות מסה, שייתן לנו את $\delta \equiv \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$.

ההנחה שלנו היא, כרגיל, ש-$\delta$ מתפלגת גאוסית:

$$P(\delta|k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{0(k)}} e^{-\delta^2/2\sigma^2_{0(k)}}, \quad \sigma_0^2(k) = \langle \delta^2 \rangle_k =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int \underbrace{\tilde{W}_k^2(k')}_{\text{פונקציית חלון עם סקלה } k \text{ (מעבירה רק } k'<k)} k'^2 \underbrace{P(k')}_{\text{Power Spectrum}} dk'$$

כמו תרגיל 6

האבולוציה בזמן של $\delta$ נותנת

$$\sigma(k,a) = \sigma_0(k) \cdot D(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma(M,a) = \sigma_0(M) \cdot D(a)$$

- הגבול $R \to \infty$ / $M \to \infty$ / $k \to 0$ מתאים להסתכלות על כל היקום ואז כמובן ש: $\sigma \to 0$ לפי ההגדרה (יש רק יקום אחד ביקום). ככל ש- $k$ גדל / $M$ קטן, כך $\sigma$ גדלה.

השבר היחסי של ספירות כאלו, עם מסה M/אורך a,
שנופלות על הילה עם מסה ~~[illegible]~~ שהיא לפחות M
(או עם גודל שהוא לפחות a) נתון ע"י ההסתברות
לקבל $\delta>\delta_c$ בתוך הכדור שלנו:

$$F(M,a)=\int_{\delta_c}^{\infty}d\delta\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{(M,a)}}\exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2_{(M,a)}}\right)=$$

$$=\int_{\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\,\sigma(M,a)}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\,\sigma_{(M,a)}}\right)$$

(שימו לב שככל ש-M גדל, $\sigma$ קטן והגבול התחתון באינטגרל מתקרב ל-$\infty$ כך שתחום האינטגרציה קטן, וכך גם $F_{(M,a)}$)

- כעת, לא נשאל מהו השבר היחסי של ספירות כאלו שנפלו על הילה עם מסה של לפחות M, אלא מהו השבר היחסי של ספירות כאלו שנפלו על הילה עם מסה בתחום $[M, M+dM]$.
זה כמובן נתון ע"י:

$$\boxed{\frac{\#\text{ spheres in halos}}{\text{tot}\,\#\text{ spheres in Univ.}}\equiv\left|\frac{dF}{dM}\right|dM}$$

לרגע נחשוב שכל היקום מלא בספירות בקירוב כאלו ושנפח היקום זה הנפח של כדור אחד כזה כפול סך כל הכדורים ביקום. אם כך,

$$\frac{1}{V}\left|\frac{dF}{dM}\right|dM=\frac{\rho_0}{M}\left|\frac{dF}{dM}\right|dM$$

זה בדיוק מספר הכדורים שנפלו על הילות חלקי נפח היקום שזה פשוט מספר ההילות במסות $[M, M+dM]$ ליחידת נפח היקום:

$$\boxed{\underbrace{n_{(M,a)}\,dM}_{\text{מספר הילות ליח' נפח ליח' מסה.}}\equiv\frac{\rho_0}{M}\left|\frac{dF}{dM}\right|dM=\frac{\rho_0}{M}\left[-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2_{(M,a)}}\right)\cdot\frac{-\delta_c}{\sqrt{2}\,\sigma^2_{(M,a)}}\left|\frac{d\sigma}{dM}\right|\right]dM=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\rho_0}{M^2}\nu_c e^{-\nu_c^2/2}\cdot\left|\frac{d\ln\sigma(M,a)}{d\ln M}\right|\cdot dM}$$

כאשר הגדרנו $\nu_c \equiv \frac{\delta_c}{\sigma(M,a)}$.

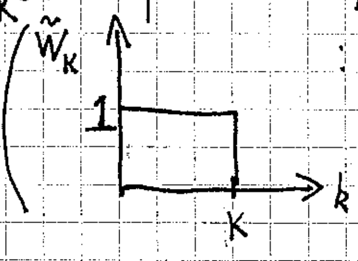
- בהשוואה לסימולציות קוסמולוגיות, התברר כי נוסחא זו קטנה בפקטור 2. כעת נבין כיצד לקבל פקטור זה.

<u>הסוד הוא לשנות גישה:</u> במקום להגדיר מראש סקלה $R$ (או $k$ או $M$) ולצוד בין כל הנקודות ביקום, נבחר מראש נקודה ביקום ונבנה כדורים ברדיוסים הולכים וקטנים (ערכי $k$ הולכים וגדלים) מגודל היקום כולו ($k \to 0$) ועד לכדור הגדול ביותר סביב אותה נקודה שמקיים בתוכו $\delta \geq \delta_c$.

מהנחת הארגודיות, 2 גישות אלו שקולות באופן עקרוני. לגישה הנוכחית קוראים <u>excursion set formalism</u>.

ככל שמקטינים את $R$ (או מגדילים את $k$) אנו למעשה מגרילים $\delta(\vec{x},K)$ מתוך ההתפלגות הגאוסית, ו-$\delta$ מבצע מעין מהלך שיכור במרחב $k$.

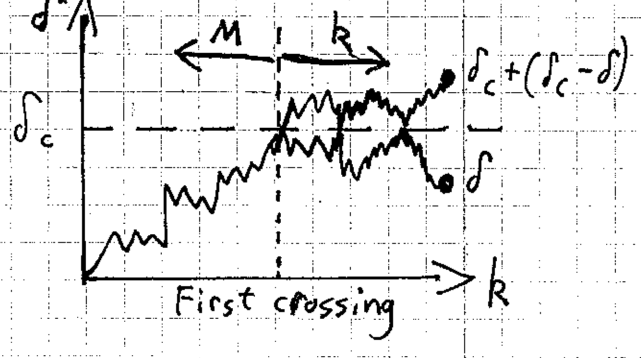
(שימו לב שמיצוע $\delta$ בכדורים עם רדיוס $\frac{2\pi}{K}$ זה שקול לשימוש בפונקציית חלון $\tilde{W}_K(k)$ שהיא פונקציית מדרגה במרחב $k$:



)

ככל שנגדיל את $k$ כך גם נגדיל את $\sigma$, ובאיזשהו שלב $\delta$ יוכל לחצות את הערך הקריטי $\delta_c$.

ברגע שזה קורה, אם נמשיך להגדיל את $k$, אז יש הסתברות זהה ש-$\delta$ יגדל או יקטן, ולכל מסלול ניתן לבנות "מסלול מראה" בעל הסתברות זהה.



~~נשאל מהי ההסתברות שהילה קשורה המקבלה ביותר סביב הנקודה שלנו היא עם מסה $M$, שמתאים לה גודל $k$ זה בעצם ההסתברות שפעם, המשוואה שהמסלול חוצה את $\delta_c$ יותר באיפשהו $k \geq K$~~

כמו מקודם, נתעניין בשאלה מה ההסתברות שסביב הנקודה שלנו יש הילה קשורה עם מסה $\geq M$. כלומר, מה הסיכוי שהמסלול חוצה לראשונה את $\delta_c$ בסקלה $k$ שמתאימה למסה גדולה או שווה לM. כלומר איפשהו $k \leq K = \frac{2\pi}{\lambda(M)}$

הסתברות זו היא בדיוק אותו $F(M,a)$ ממקודם.

היא נתונה ע"י אחד פחות ההסתברות שעד ל- $k=K$, המסלול לא חצה אפילו פעם אחת את $\delta_c$.

$$F(M,a) = 1 - \mathbb{P}(\text{No Crossing} < K)$$

$$\mathbb{P}(\text{No Crossing} < K) = \int_{-\infty}^{\delta_c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{(k)}} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma_{(k)}^2}} d\delta - \left\{ \begin{array}{c} \text{מסלולים שחצו את } \delta_c \\ \text{לפני, אבל רק חזרה} \\ \text{למטה ב- } k=K. \end{array} \right\}$$

למה $-\infty$ ולא $-1$? הרי $\delta = \frac{\rho-\rho_0}{\rho_0} = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \geq -1$? למעשה, $\ln(1+\delta)$ מתפלג גאוסית בתחום $(-\infty, \infty)$ ובתחום הליניארי $\delta \sim \ln(1+\delta)$.

לפילוסופין, גם ככה ההסתברות זניחה להגיע ל: $(\delta = -1)$, ואפשר לקרב את גבול האינטגרציה להיות $-\infty$.

"תמונת מראה" של מסלולים שסיים ב $2\delta_c - \delta = \delta_c + (\delta_c - \delta)$

$$= \int_{-\infty}^{\delta_c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{(k)}} e^{-\frac{(2\delta_c-\delta)^2}{2\sigma_{(k)}^2}} d\delta = \int_{\delta_c}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{(k)}} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma_{(k)}^2}} d\delta$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(\text{No Crossing} < K) = \int_{-\infty}^{\delta_c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{(k)}} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma_{(k)}^2}} d\delta - \int_{\delta_c}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{(k)}} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma_{(k)}^2}} d\delta$$

$$F(M,a) = 1 - \mathbb{P}(\text{No Crossing}), \quad 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{(k)}} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma_{(k)}^2}} d\delta$$

$$\boxed{F(M,a) = 2\int_{\delta_c}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{(M,a)}} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2_{(M,a)}}} d\delta}$$ ומכאן מקבלים:

שבדיוק מסדר לנו את הפקטור 2 ממקודם.

לכן:
$$\boxed{n_{(M,a)}\,dM = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\rho_0}{M^2}\,\nu_c\, e^{-\nu_c^2/2} \left|\frac{d\ln\sigma(M,a)}{d\ln M}\right| dM}$$

וזה אכן מתאים לתוצאות סימולציות קוסמולוגיות.

שימו לב שזה עובד עם הפקטור 2 רק עבור Top-Hat
k-space filter

**הערכה של $n_{(M)}$**

נגדיר את $M_*(a)$ להיות המסה שבה $\sigma(M_*,a) = \delta_c$,

ולכן $\nu_c(M_*) = 1$.

נעבוד עם Power Spectrum מהצורה $P_{(k)} = k^n$

ועם פילטר
$$\tilde{W}_{(k)} = \begin{cases} 1 & k < K_* \\ 0 & k > K_* \end{cases}$$

לכן:
$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi^2}\int \tilde{W}^2_{(k)}\, k^2 P_{(k)}\, dk = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^K k^{n+2} dk \propto K^{n+3}$$

$$\sigma^2 \propto K^{n+3} \propto \lambda^{-(n+3)} \propto M^{-(n+3)/3}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sigma_{(M)} \propto M^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{n+3}{6}}$$

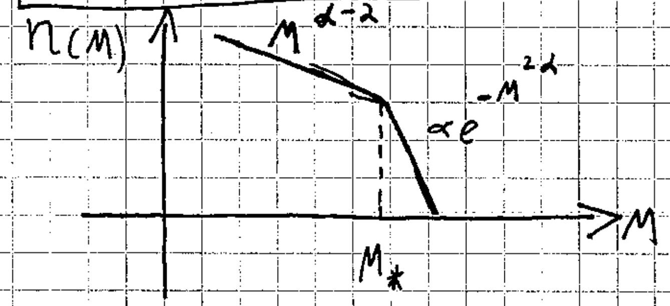
$$\sigma_{(M)} = A M^{-\alpha}, \quad \boxed{\frac{d\ln\sigma}{d\ln M} = -\alpha}$$

$$\sigma(M_*) = A M_*^{-\alpha} = \delta_c \Rightarrow A = \delta_c M_*^{\alpha} \Rightarrow \boxed{\sigma_{(M)} = \delta_c \left(\frac{M}{M_*}\right)^{-\alpha}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nu_c = \frac{\delta_c}{\sigma} = \left(\frac{M}{M_*}\right)^{\alpha}}$$

נציב הכל ב- $n(M,a)$ ונקבל:

$$\boxed{n(M,a)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\rho_0(a)}{M_*^2(a)}\cdot\alpha\cdot\left(\frac{M}{M_{*(a)}}\right)^{\alpha-2}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{M}{M_{*(a)}}\right)^{2\alpha}\right)}$$




## סימונים מקובלים בספרות

כאמור $\sigma(M,a)=\sigma_0(M)\,D(a)$ כאשר $M$ מייצג סקלה מרחבית ואילו $a$ מייצג זמן.

מגדירים:

$$\boxed{\begin{aligned}S_{(M)}&\equiv\sigma_0^2(M)\\ \omega_{(a)}&\equiv\delta_c/D(a)\end{aligned}}$$

בצורה הזאת, $S$ מייצגת את המסה (הסקלה המרחבית) ואילו $\omega$ מייצג את $a$ (הסקלה הזמנית).

$$dS=2\sigma_0 d\sigma_0 \Rightarrow \frac{d\sigma_0}{\sigma_0}=\frac{1}{2\sigma^2}dS=\frac{1}{2}\frac{dS}{S}=\frac{1}{2}d\ln(S)$$

$$\Leftarrow \boxed{d\ln(\sigma_0)=\tfrac{1}{2}d\ln(S)}$$

$$\boxed{\frac{d\ln\sigma(M,a)}{dM}}=\frac{d\ln\sigma_0(M)}{dM}=\frac{1}{2}\frac{d\ln S}{dM}=\boxed{\frac{1}{2}\frac{M}{S}\frac{dS}{dM}}$$

$$\boxed{\nu_c}\equiv\frac{\delta_c}{\sigma(M,a)}=\frac{\delta_c}{\sigma_0(M)\,D(a)}=\boxed{\frac{\omega_{(a)}}{S^{1/2}_{(M)}}}$$

$$n(M,a)dM=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\rho_0}{M^2}\nu_c e^{-\nu_c^2/2}\left|\frac{d\ln\sigma}{d\ln M}\right|dM=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\rho_0}{M^2}\frac{\omega}{S^{1/2}}e^{-\frac{\omega^2}{2S}}\cdot\frac{1}{2}\frac{M}{S}\frac{dS}{dM}dM$$

$$\boxed{n(M,a)\,dM = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\rho_0}{M}\frac{\omega}{S^{3/2}}e^{-\frac{\omega^2}{2S}}\left|\frac{dS}{dM}\right|dM = \frac{\rho_0}{M}f(S,\omega)\,dS}$$

$$\boxed{f(S,\omega)\equiv\frac{\omega}{\sqrt{2\pi}\,S^{3/2}}e^{-\frac{\omega^2}{2S}}}$$

$f(S,\omega)$ זה למעשה הסתברות למצוא הילה עם מסה המתאימה,
ל- $S$ בזמן המתאים ל- $\omega$, ולכן מכפילים את זה ב: $\frac{\rho_0}{M}$
כדי לקבל צפיפות מספרית.

נשתמש בסימונים אלה כדי לדון בתורת E.P.S.

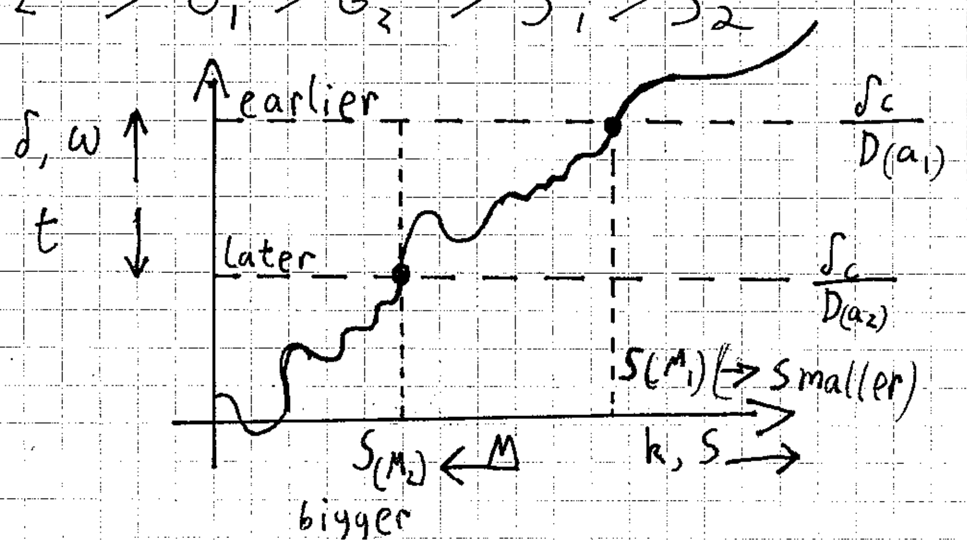
## Extended Press Schechter Theory

תורת PS הרגילה עונה על השאלה איזה אחוז מהחומר ביקום נמצא בזמן נתון בהילות ~~[illegible]~~ בתוך מסות נתון.

תורת EPS שואלת שאלה כללית יותר:
אם הילה קרסה למסה $M_2$ בזמן $t_2$, אז מה ההסתברות שבזמן $t_1<t_2$ חלק מההילה הזו היתה שייכת להילה עם מסה $M_1<M_2$?

שימו לב: $t_1<t_2 \Rightarrow D(a_1)<D(a_2) \Rightarrow \omega_1>\omega_2$

$M_1<M_2 \Rightarrow \sigma_1>\sigma_2 \Rightarrow S_1>S_2$



אפקטיבית, זו סומה בע״ה כמו מקודם ( צפ רגיל) רק
שהצבנו את הראשית לנק' $(S_2, \omega_2)$

$$\underbrace{f(S_1, \omega_1}_{\text{מוקדם}} | \underbrace{S_2, \omega_2)}_{\text{בזמן מאוחר}} dS_1 = f(\Delta S, \Delta\omega) d(\Delta S) \qquad \Delta S = S_1 - S_2$$

$$d(\Delta S) = dS_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega_1 - \omega_2}{(S_1 - S_2)^{3/2}} e^{-\frac{(\omega_1-\omega_2)^2}{2(S_1-S_2)}} dS_1$$

## קורס I : Merger Rates of halos

נמצא את ההסתברות שהילה במסה $M_1$ בזמן $t_1$ יתמזג עם הילה אחרת כדי ליצור הילה במסה $M_1 < M_2$ בזמן $t_1 < t_2$.

$\Leftarrow$ במילים אחרות, אנחנו צריכים למצוא את

$$f(S_2, \omega_2 | S_1, \omega_1)$$

כאשר כבר מצאנו מקודם את

$$f(S_1, \omega_1 | S_2, \omega_2)$$

נעשה שימוש ב- Bayes' Theorem האומר כי

$$P(A|B) = \frac{P(A)\,P(B|A)}{P(B)}$$

$$\boxed{f(S_2, \omega_2 | S_1, \omega_1) dS_2 = \frac{f(S_2, \omega_2) \cdot f(S_1, \omega_1 | S_2, \omega_2)}{f(S_1, \omega_1)} dS_2 = \ldots}$$

$$\boxed{= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega_2(\omega_1 - \omega_2)}{\omega_1} \cdot \left[\frac{S_1}{S_2(S_1 - S_2)}\right]^{3/2} \exp\left[-\frac{(\omega_2 S_1 - \omega_1 S_2)^2}{2 S_1 S_2 (S_1 - S_2)}\right] dS_2}$$

כדי לקבל את קצב המיזוגים, ניקח את הגבול
$t_2 \to t_1$, כלומר $\omega_2 \to \omega_1 \equiv \omega$ (ראו גם שאלה בתרגיל בית)

$$\boxed{P(S_2,\overset{(-d\omega)}{\omega}\,|\,S_1,\dot{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{S_1}{S_2(S_1-S_2)^{3/2}}\right]^{3/2} \exp\left[-\frac{\omega^2(S_1-S_2)}{2S_1S_2}\right] dS_2\, d\omega}$$

מדוע זה מתאר את ה- merger rate?
← בפרק זמן סופי $\Delta\omega$, השינוי $\Delta S$ יכול להיות תוצאה של מספר מיזוגים קטנים יותר. אבל, כאשר $\Delta\omega \to d\omega$ אינפיניטסימלי אז השינוי $dS$ בהכרח מגיע ממיזוג יחיד שהגדיל את המסה $M$ מ- $S_1$ ל- $S_2$.

מצאנו את ההסתברות לעבור מיזוג ליחידת זמן ליחידת מסה.
בתרגיל בית תראו איך להשתמש בנוסחה זו כדי לחשב את ההסתברות, למשל, שב- Gyr האחרון, הילה שמסתה היום היא $10^{12} M_\odot$ התמזגה עם הילה שמסתה $\sim 10^{9} M_\odot$ (הסתברות גבוהה) או עם הילה שמסתה $\sim 10^{12} M_\odot$ (הסתברות נמוכה).

## קוגמון II: Halo Formation Time

החומר שמרכיב כעת הילה שמסתה היום $M_{final}$ היתה בעבר מפוזרת בהרבה "הילות אם" קטנות יותר, שהתמזגו יחד כדי ליצור את ההילה המרכזית.

נגדיר את <u>זמן ההיווצרות</u> של ההילה להיות הזמן שבו יש הילת אם מסויימת שמכילה מעל מחצית מהמסה הסופית, כלומר $M > \frac{1}{2} M_{final}$ (לפני כן, ההגדרה של ה- main progenitor היא בעייתית ולא אחידה)

אומרים זמן ההיווצרות $t_{formation} \equiv t_f$, ה- main progenitor מוגדר להיות ההילה המאסיבית ביותר.

מטרתנו כעת היא למצוא את התפלגות של זמני ההיווצרות של הילות במסות שונות.

נתחיל בהסתברות שלהילה במסה $M_2$ בזמן $t_2$ היה "הורה" במסה בתחום $(M_1, M_1+dM_1)$ בזמן $t_1$:

$$= \frac{\left\{ \begin{array}{c} \text{צפיפות מספרית של הילות ב- } t_1 \text{ עם } \\ M_1 \text{, שסיימו בהילות עם מסה } (M_2, M_2+dM_2) \end{array} \right\}}{\left\{ \text{צפיפות מספרית של הילות עם } M_2 \text{ בזמן } t_2 \right\}}$$

$$= \frac{\left\{ \begin{array}{c} \text{צפיפות של } M_1 \\ \text{ב- } t_1 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \text{הסתברות ש- } M_1 \text{ ב- } t_1 \\ \text{יתמזג לתוך } M_2 \text{ ב- } t_2 \end{array} \right\}}{\left\{ \text{צפיפות מספרית של } M_2 \text{ ב- } t_2 \right\}}$$

$$= \frac{\frac{\rho_0}{M_1} f(S_1, \omega_1) dS_1 \cdot f(S_2, \omega_2 | S_1, \omega_1) dS_2}{\frac{\rho_0}{M_2} f(S_2, \omega_2) dS_2}$$

$$= \frac{M_2}{M_1} \frac{f(S_1, \omega_1) f(S_2, \omega_2 | S_1, \omega_1)}{f(S_2, \omega_2)} dS_1$$

$$= \underbrace{\frac{M_2}{M_1}}_{\text{כמה הילות } M_1 \text{ מרכיבות את } M_2} \underbrace{f(S_1, \omega_1 | S_2, \omega_2)}_{\text{הסתברות שמסה מתוך } M_2 \text{ הגיע מ- } M_1} dS_1 = N_{prog} dM_1$$

עכשיו נבדוק הסתברות של- $M_2$ יש הורה בתחום $\left(\frac{M_2}{2}, M_2\right)$ בזמן $t_1$:

$$P\left(M_1 > \frac{M_2}{2}, t_1 \middle| M_2, t_2\right) = \int_{M_2/2}^{M_2} N_{prog}\, dM_1$$

$$= \int_{S_2=S(M_2)}^{S_h=S\left(\frac{M_2}{2}\right)} \frac{M_2}{M_1} f(S_1,\omega_1|S_2,\omega_2)\,dS_1 = \int_{S_2}^{S_h} \frac{M_2}{M_1} f(\Delta S,\Delta\omega)\,d(\Delta S)$$

בעצם, לפי הגדרת $t_f$, זה שקול להסתברות שמתקיים $t_f \leq t_1$ (בזמן $t_1$ כבר הייתה הילה עם $M_1 \geq \frac{M_2}{2}$)

$$\Downarrow$$

$$P(t_f < t_1 | M_2, t_2) = \int_{S_2}^{S_h} \frac{M_2}{M_1} f(\Delta S,\Delta\omega)\,d(\Delta S) =$$

$$= \int_{S_2}^{S_h} \frac{M_2}{M_1} f(S_1,\omega_1|S_2,\omega_2)\,dS_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{S_2}^{S_h} \frac{M_2}{M_1} \frac{\omega_1-\omega_2}{(S_1-S_2)^{3/2}} e^{-\frac{(\omega_1-\omega_2)^2}{2(S_1-S_2)}}\,dS_1$$

$S_i \longleftrightarrow M_i$

$\omega_i \longleftrightarrow t_i$

זוהי בדיוק התפלגות של זמני ההיווצרות!

נקבל ביטוי שימושי יותר ע"י הטרנספורמציה:

$$\tilde{S} = \frac{S_1-S_2}{S_h-S_2} = \frac{\Delta S}{S_h-S_2}$$

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega_1-\omega_2}{\sqrt{S_h-S_2}} = \frac{\Delta\omega}{\sqrt{S_h-S_2}}$$

- $\frac{\omega_1-\omega_2}{(S_1-S_2)^{3/2}} = \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{S}^{3/2}} \cdot \frac{1}{S_h-S_2}$
- $dS_1 = (S_h-S_2)\,d\tilde{S}$
- $\frac{(\omega_1-\omega_2)^2}{2(S_1-S_2)} = \frac{\tilde{\omega}^2}{2\tilde{S}}$

$$\Longrightarrow \boxed{P(t_f < t_1 | M_2, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{M_2}{M_1} \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{S}^{3/2}} e^{-\frac{\tilde{\omega}^2}{2\tilde{S}}}\,d\tilde{S}}$$

$P(k) \equiv \langle \delta_k^2 \rangle \propto k^n$ Power Spectrum עבור

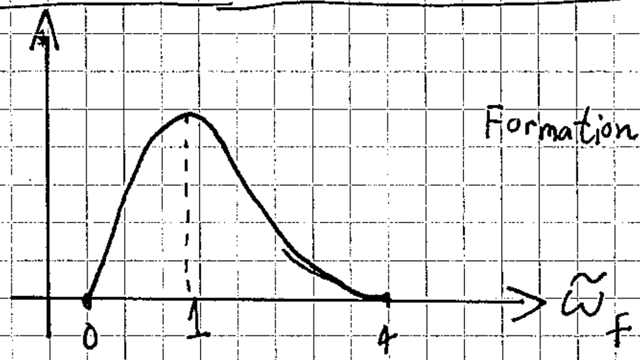
$$S = \sigma^2 = \langle \delta_{\lambda}^2 \rangle \propto \int \langle \delta_k^2 \rangle d^3k \propto \int k^n d^3k \propto k^{n+3} \propto M^{-\frac{(n+3)}{3}}$$

$$\begin{cases} S \propto M^{-\alpha} \\ M \propto S^{-1/\alpha} \end{cases} \qquad \alpha = \frac{n+3}{3} \qquad \frac{\left(\frac{M_2}{2}\right)^{-\alpha}}{M_2^{-\alpha}} = 2^{\alpha}$$

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{M(S_2)}{M(S_1)} = \frac{S_2^{-1/\alpha}}{S_1^{-1/\alpha}} = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{1/\alpha} = \left[1 + \tilde{S}\left(\frac{S_h}{S_2} - 1\right)\right]^{1/\alpha} =$$

$$= \left[1 + \tilde{S}(2^{\alpha} - 1)\right]^{1/\alpha}$$

$$\boxed{P(\underbrace{t_f < t_1}_{\omega_f > \omega_1} \mid M_2, t_2) = P(\tilde{\omega}_f > \tilde{\omega}) = \int_0^1 \left[1 + \tilde{S}(2^{\alpha} - 1)\right]^{1/\alpha} \frac{\tilde{\omega}}{\sqrt{2\pi}\,\tilde{S}^{3/2}} e^{-\frac{\tilde{\omega}^2}{2\tilde{S}}} d\tilde{S}}$$




$\tilde{\omega}_f$ [illegible]

Formation Redshift $\leftarrow Z_f$ ל

$$\tilde{\omega}_f = \frac{\omega_f - \omega_2}{\sqrt{S_h - S_2}} \Rightarrow \omega_f = \omega_2 + \tilde{\omega}_f \sqrt{S_h - S_2}$$

$$\frac{\delta_c}{D(t_f)} = \frac{\delta_c}{D(t_2)} + \tilde{\omega}_f \sqrt{S\left(\frac{M_2}{2}\right) - S(M_2)} \qquad ⊛$$

$\boxed{D(z) = \frac{1}{1+z} = a \propto t^{2/3}}$ :[illegible] $\Omega_m = 1$ עבור

נבחר את זמן 2 להיות היום (זמן 0) ולכן:

$$(1+z_f) = \left(\frac{t_0}{t_f}\right)^{2/3}$$

$$\Longrightarrow \quad 1+z_f = 1 + \frac{\tilde{\omega}_f}{\cancel{\delta_c}} \sqrt{\frac{S_h}{S_0} - 1}\ \frac{\sqrt{S_0}}{\underbrace{\sqrt{S(M_*)}}} \cancel{\sqrt{S(M_*)}} \qquad \circledast$$

$$\longrightarrow \sqrt{\sigma^2(M_*)} = \sigma(M_*) = \delta_c$$

$$\boxed{z_f = \tilde{\omega}_f \sqrt{2^{\alpha} - 1}\left(\frac{M_0}{M_*}\right)^{-\alpha/2}}$$

ניקח את $\tilde{\omega}_f$ להיות בערך בפיק של $P(\tilde{\omega}_f)$

כלומר $\tilde{\omega}_f \simeq 1$. עבור הערך ל-$M_*$ היום ועבור $n=1$

ב-Power-Spectrum מקבלים:

<u>Cluster today:</u> $M_0 \sim 100 M_* \rightarrow z_f \simeq 0.1$

<u>Milky Way:</u> $M_0 \sim M_* \rightarrow z_f \simeq 1$