פיזיקה תרמית - תרגול 2

פונקציית הכפליות והתפלגותה

אנו דנים במערכת שבה יש N ספינים (מגנטים קטנים) שכל אחד מהם יכול להיות מכוון כלפי מעלה או כלפי מטה (לשם נוחות נניח כי N הוא זוגי, אבל זה לא קריטי).

נסמן ב- $N_\uparrow$ את מספר הספינים המכוונים מעלה וב- $N_\downarrow$ את מספר הספינים המכוונים מטה. נגדיר את הספין השיורי במערכת ע"י $\boxed{2S = N_\uparrow - N_\downarrow}$ וכמובן מתקיים $N = N_\uparrow + N_\downarrow$.

מכאן קל להסיק ש: $S = \frac{N}{2} - N_\downarrow$ והטווח של S הוא כל המספרים השלמים בתחום $-\frac{N}{2} \le S \le \frac{N}{2}$.

נגדיר את <u>פונקציית הכפליות</u> להיות מספר המצבים השונים המתאימים לאותו ספין שיורי (מספר <u>המיקרו-מצבים</u> השונים שמובילים לאותו <u>מאקרו-מצב</u>). קל להראות <u>שמתקיים:</u>

$$g(N,S) = \binom{N}{N_\uparrow(S)} = \frac{N!}{N_\uparrow(S)!\,N_\downarrow(S)!} = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}+S\right)!\left(\frac{N}{2}-S\right)!}$$

(לעיתים מסמנים במקום $g(N,S)$, $\Omega(N,S)$)

נשתמש בקירוב סטירלינג עבור $N \gg 1$, $N! \cong \sqrt{2\pi N}\, N^N e^{-N}$

ונפתח את $g(N,S)$.

~~שימו לב שמתקיים~~ $\cancel{\boxed{\ln(N!) \cong \ln\sqrt{2\pi N} + N\ln N - N}}$

$$\cancel{\ln[g(N,S)] = \ln(N!) - \ln\left[\left(\tfrac{N}{2}+S\right)!\right] - \ln\left[\left(\tfrac{N}{2}-S\right)!\right] \cong}$$

$$\cancel{\cong \ln\sqrt{2\pi} + \tfrac{1}{2}\ln N + N\ln N - N - \ln\sqrt{2\pi} - \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{N}{2}+S\right) - \left(\tfrac{N}{2}+S\right)\ln\left(\tfrac{N}{2}+S\right) + \left(\tfrac{N}{2}+S\right)}$$

$$\cancel{- \ln\sqrt{2\pi} - \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{N}{2}-S\right) - \left(\tfrac{N}{2}-S\right)\ln\left(\tfrac{N}{2}-S\right) + \left(\tfrac{N}{2}-S\right) = \ldots}$$

$$\cancel{\ln\left(g_{(N,s)}\right) \simeq -\ln\left(\sqrt{2\pi}\right) + \left(N+\frac{1}{2}\right)\ln N - \left(\frac{N+1}{2}+s\right)\ln\left(\frac{N}{2}+s\right) - \left(\frac{N+1}{2}-s\right)\ln\left(\frac{N}{2}-s\right)}$$

$$g_{(N,s)} = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}+s\right)!\left(\frac{N}{2}-s\right)!} \simeq \frac{\cancel{\boxed{\sqrt{2\pi}}}\, N^{N+\frac{1}{2}} \cancel{e^{-N}}}{\cancel{\boxed{\sqrt{2\pi}}}\left(\frac{N}{2}+s\right)^{\frac{N+1}{2}+s} \cancel{e^{-\left(\frac{N}{2}+s\right)}}\, \boxed{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{N}{2}-s\right)^{\frac{N+1}{2}-s} \cancel{e^{-\left(\frac{N}{2}-s\right)}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N^{N+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{N}{2}+s\right)^{\frac{N+1}{2}+s} \cdot \left(\frac{N}{2}-s\right)^{\frac{N+1}{2}-s}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N^{N+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{N}{2}\right)^{\frac{N+1}{2}+s} \cdot \left[1+\frac{2s}{N}\right]^{\frac{N+1}{2}+s} \cdot \left(\frac{N}{2}\right)^{\frac{N+1}{2}-s} \cdot \left[1-\frac{2s}{N}\right]^{\frac{N+1}{2}-s}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N^{N+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{N}{2}\right)^{N+1} \cdot \left[1+\frac{2s}{N}\right]^{\frac{N+1}{2}+s} \cdot \left[1-\frac{2s}{N}\right]^{\frac{N+1}{2}-s}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2^{N+1}}{N^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\left[\left(1+\frac{2s}{N}\right)\cdot\left(1-\frac{2s}{N}\right)\right]^{\frac{N+1}{2}} \cdot \left(1+\frac{2s}{N}\right)^{s} \cdot \left(1-\frac{2s}{N}\right)^{-s}}$$

$$= 2^N \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \cdot \left(\frac{1-\frac{2s}{N}}{1+\frac{2s}{N}}\right)^{s} \cdot \left[1-\frac{4s^2}{N^2}\right]^{-\frac{N+1}{2}}$$

$$= \boxed{2^N \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \cdot \left(\frac{N-2s}{N+2s}\right)^{s} \cdot \left(1-\frac{4s^2}{N^2}\right)^{-\frac{N+1}{2}} \simeq g_{(N,s)}}$$

עד כאן, חוץ מקירוב סטירלינג שעשינו בהתחלה, לא
עשינו שום קירוב אחר.
כדי להבין יותר טוב את הביטוי הנ"ל, נוציא
$\ln()$ לשני האיברים. לשם נוחות, נסמן $\boxed{A \equiv 2^N \sqrt{\frac{2}{\pi N}}}$

$$\ln\left(g_{(N,s)}\right) \simeq \ln(A) + s\ln\left[N-2s\right] - s\ln\left[N+2s\right] - \left(\frac{N+1}{2}\right)\ln\left[1-\frac{4s^2}{N^2}\right]$$

$$= \ln(A) + \cancel{s\ln N} + s\ln\left[1-\frac{2s}{N}\right] - \cancel{s\ln N} - s\ln\left[1+\frac{2s}{N}\right] - \frac{N+1}{2}\ln\left[1-\frac{4s^2}{N^2}\right]$$

$$\ln(g(N,s)) \simeq \ln(A) + s\ln\left[1-\frac{2s}{N}\right] - s\ln\left[1+\frac{2s}{N}\right] - \frac{N+1}{2}\ln\left[1-\frac{4s^2}{N^2}\right]$$

כעת, נזכור כי $N \gg 1$, ובמרבית המקרים $s < N$.
נתייחס ל- $\frac{s}{N}$ כפרמטר קטן, ונפתח את פונקציות ה- ln
לפי: $\ln(1+x) \simeq x$ כאשר $x \ll 1$.

$$\ln[g(N,s)] \simeq \ln(A) + s\cdot\left(\frac{-2s}{N}\right) - s\cdot\left(\frac{2s}{N}\right) - \underbrace{\frac{N+1}{2}}\cdot\frac{-4s^2}{N^2} \simeq$$

$$N+1 \simeq N \qquad N \gg 1$$

$$\simeq \ln(A) - \frac{4s^2}{N} + \frac{2s^2}{N} = \ln(A) - \frac{2s^2}{N}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\ln[g(N,s)] \simeq \ln\left[2^N\sqrt{\frac{2}{\pi N}}\right] - \frac{2s^2}{N}}$$

ניקח אקספוננט של 2 האגפים ונקבל:

$$\boxed{g(N,s) \simeq 2^N\sqrt{\frac{2}{\pi N}}\,e^{-\frac{2s^2}{N}}}$$

כפי שנראה בקרוב, מאוד לא סביר לקבל s מאוד רחוק מאפס,
ולכן הקירוב שלקחנו $\frac{s}{N} \ll 1$ עבור $N \gg 1$ יהיה
מוצדק.

אם ההסתברות לכל מיקרו-מצב היא זהה, אז מכיוון
שיש סה"כ 2^N מצבים כאלה, ההסתברות להיות
במצב עם s מסויים היא:

$$\boxed{P(N,s) = \frac{1}{2^N}g(N,s) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}}\,e^{-\frac{2s^2}{N}}}$$

קיבלנו גאוסיאן במשתנה s. לפני שנמשיך, נדון
כעת בתכונות של פונקציית הגאוסיאן.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

נירמול: מכיוון שמתקיים $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$, קל לראות שמתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1$$

ממוצע: $\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)\,dx=0$ מסימטריה של האינטגרנד.

שונות: ע"י אינטגרציה בחלקים

$$\langle x^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f(x)\,dx=\sigma^2$$

ולכן השונות:

$$(\Delta x)^2=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2=\sigma^2$$

ולכן סט"ת התקן:

$$\boxed{(\Delta x)=\sigma}$$

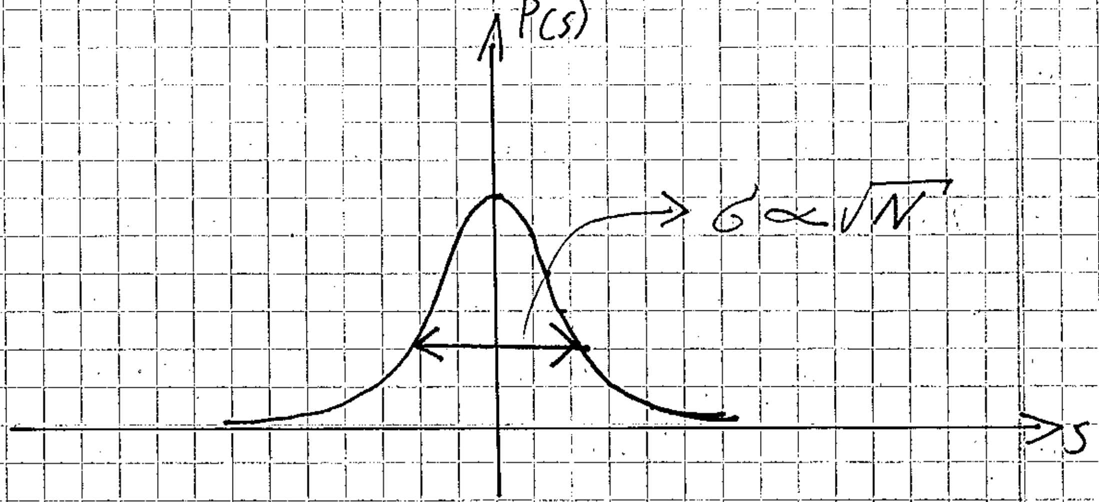
שימו לב שכאשר $x=\sigma$, $f(x)$ יורדת בפקטור של $\frac{1}{\sqrt{e}}\cong 0.6$ מערכה המקסימלי, ולכן זה באמת מהווה מדד לרוחב של הפונקציה, שקראנו **סט"ת התקן**

נחזור לפונקציה שלנו ונרשום אותה בצורה קצת אחרת:

$$\boxed{P(N,s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{N}{4}}}e^{-\frac{s^2}{2\cdot N/4}}}$$

לכן קל לזהות שההסתברות שחישבנו היא אכן גאוסיאן מנורמל, עם ממוצע 0 וסט"ת תקן

$$\boxed{\sigma=\sqrt{\frac{N}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{N}}$$



מכיוון שהערך המקסימלי (או המינימלי) של s הוא $\frac{N}{2} \propto N$, נקבל כי הרוחב היחסי של ההתפלגות הינו $\frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{N}}{N} \propto \frac{\sigma}{|s|_{max}}$, כלומר הוא הולך וקטן ככל שגדל את מספר הספינים. המשמעות הינה שעבור מספר גדול מאוד של ספינים, נאמר $N = 10^{20}$ (שזה עדיין הרבה פחות ממספר אבוגדרו), ההסתברות למצוא את המערכת הרחק מהמצב הסביר ביותר הינה אפסית, מסדר גודל של

$$\frac{1}{\sqrt{N}} = 10^{-10}.$$

תרגיל

נתונה המע' הנ"ל עם $N = 10^{22}$ וכל ספין משנה את מצבו כל ננו-שנייה. הערך כמה זמן נצטרך לחכות בממוצע, עד שנמדוד ערך ספין שונה השונה לפחות $\pm 10^{-9}$ (מיליארדית) מהערך המקסימלי האפשרי במערכת?

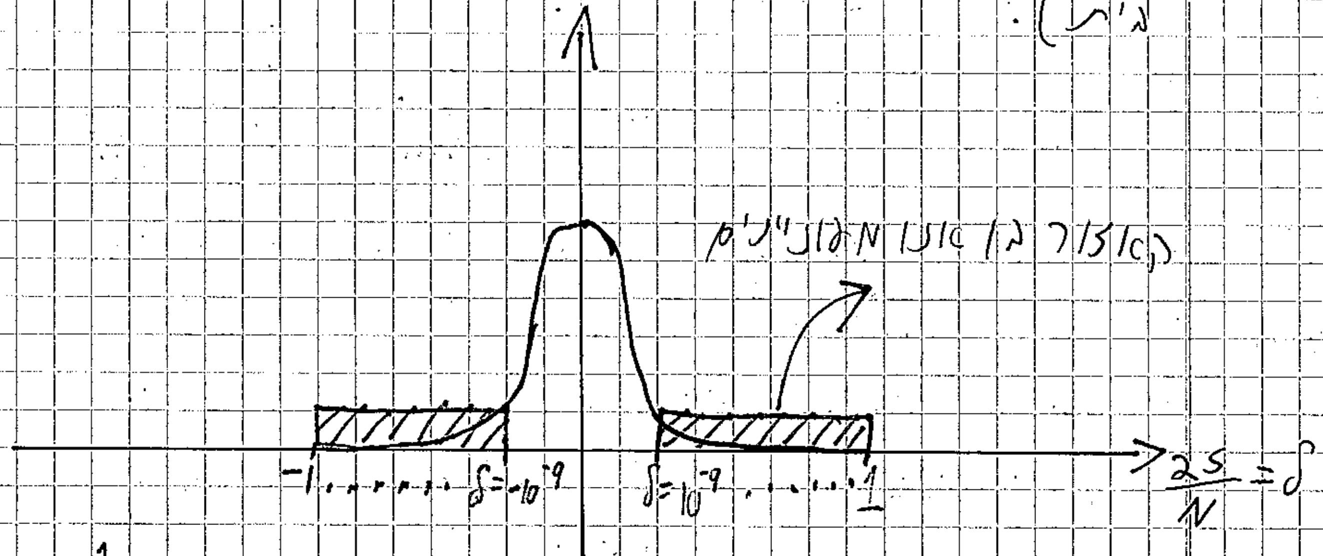
פתרון:

הערך המקסימלי האפשרי הוא $N/2$. נסמן את הסטייה בה אנו מעוניינים על ידי $\delta = \frac{|s|}{N/2} = 10^{-9}$

נקבל:

$$\boxed{P(N,s) =} \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp\left[-\frac{2s^2}{N}\right] = \boxed{\sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp\left[-\delta^2 \frac{N}{2}\right] \equiv P_{new}(N,\delta)}$$

ברור כי עבור כל ערך של δ הגדול מזה המבוקש, ההסתברות קטנה יותר. יתר על כן, מכיוון שאנו מעוניינים רק בהערכה, נניח כי המספר הנ"ל יתקבל גם לערכים גדולים יותר של δ ונקבל <u>חסם עליון</u> (גס מאוד!) של ההסתברות ע"י ההנחה כי ערך זה נשאר קבוע, ולכן האינטגרל המעניין אותנו חסום ע"י שטח המלבנים שבאיור לעיל (באופן עקרוני, ניתן לעשות חישוב מדויק יותר, ותעשו אותו בתרגיל בית).



$$2\cdot\int_{\delta=10^{-9}}^{1} P_{new}(N,\delta)\,d\delta < 2\cdot P_{new}(N,\delta=10^{-9})\cdot[\text{אורך המלבנים}] \approx$$

$$\approx \underbrace{2\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi N}}}_{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}=\sqrt{\frac{8}{\pi}}\approx\sqrt{2.5}\approx 1.5\approx 1}\, e^{-\delta^2\cdot\frac{N}{2}}\cdot 1 \approx N^{-\frac{1}{2}}\underbrace{\exp\left[-10^{-18}\frac{10^{22}}{2}\right]}_{e^{x}=10^{x\cdot\log_{10}(e)}} =$$

$$=10^{-11}\exp[-5000]\approx 10^{-2182.5}\approx\boxed{3\times10^{-2183}}$$

אם דוגמים 10^9 מצבים בשנייה ולכן הזמן t (בשניות) הנדרש נתון ע"י:

$$(10^9\cdot t)\cdot 10^{-11}\exp(-5000)=1$$

<u>נקבל:</u> $\boxed{t_{[sec]}}=\boxed{10^2\exp(5000)}\approx 3\times10^{2173}$.

(לשם השוואה, גיל היקום (היום) $\sim 4\times10^{17}\,sec$)